N° d'ordre :

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

PAR

Jean-Paul SANDRAZ

Ingénieur I.E.G. et I.A.G.

Identification et commande multidimensionnelle d'une unité pilote de fabrication de papier

---

Thèse soutenue le 19 Juillet 1973 devant la commission d'examen

JURY

MM. R. PAUTHENET		Président
R. PERRET C. FOULARD	}	Examinateurs
J. RENARD R. CHARUEL A. RAMAZ	}	Invités

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544319_0046

N° d'ordre :

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

PAR

Jean-Paul SANDRAZ

Ingénieur I.E.G. et I.A.G.

Identification et commande multidimensionnelle d'une unité pilote de fabrication de papier

---

Thèse soutenue le 19 Juillet 1973 devant la commission d'examen

JURY

MM.	R. PAUTHENET	Président
	R. PERRET	Examinateurs
	C. FOULARD	
	J. RENARD	Invités
	R. CHARUEL	
	A. RAMAZ	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique

MM.	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie Pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

.../...

Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BOUCHET Yves	Anatomie
BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
BRUGEL Lucien	Energétique
BUISSON Roger	Physique
BUTEL Jean	Orthopédie
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
CHIAVERINA Jean	Biologie Appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
COULOMB Max	Radiologie
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GENSAC Pierre	Botanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appppliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICHOULIER Jean	Physique (IUT "A")
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)
NEGRE Robert	Mécanique
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT "B")
PEFFEN René	Métallurgie
PELMONT Jean	Physiologie animale
PERRET Jean	Neurologie
PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide

.../...

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. BULLEMER Bernhard	Physique
HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
STEPHENS Michaël	Mathématiques Appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM. BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme BONNIER Jane	Chimie générale
MM. CARLIER Georges	Biologie végétale
COHEN Joseph	Electrotechnique
COUMES André	Radioélectricité
DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
DEPORTES Charles	Chimie minérale
GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
GAVEND Michel	Pharmacologie
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
GLENAT René	Chimie organique
HACQUES Gérard	Calcul numérique
JANIN Bernard	Géographie
Mme KAHANE Josette	Physique
MM. MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
REVOL Michel	Urologie
REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
ROBERT André	Chimie papetière
DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SIBILLE Robert	Construction Mécanique
SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
ALARY Josette	Chimie analytique
MM. AMBLARD Pierre	Dermatologie
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
ARMAND Yves	Chimie
BEGUIN Claude	Chimie organique
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
BILLET Jean	Géographie
BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
BLOCH Daniel	Electrotechnique

.../...

MM. PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle PIERY Yvette	Biologie animale
MM. RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RENAUD Maurice	Chimie
RICHARD Lucien	Botanique
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROMIER Guy	Mathématiques (IUT "B")
SHOM Jean-Claude	Chimie générale
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972

"Ainsi, quand on veut montrer une chose générale, il faut en donner la règle particulière d'un cas ; mais si on veut montrer un cas particulier, il faudra commencer par la règle générale. Car on trouve toujours obscure la chose qu'on veut prouver, et claire celle qu'on emploie à la preuve."

PASCAL

AVANT-PROPOS

Cette étude a été réalisée dans le cadre du programme de recherche du Service "Mathématiques Appliquées", au Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses. Que Monsieur ARGUILLERE, son Président, et Monsieur COGNARD, son Directeur Général, veuillent bien au nom des responsables de cet Organisme accepter nos remerciements pour les possibilités très intéressantes qui nous ont été ainsi offertes.

Nous voulons exprimer toute notre reconnaissance à Monsieur le Professeur PAUTHENET, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et de Génie Physique, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider notre jury de thèse.

Que Monsieur le Professeur PERRET, Directeur du Laboratoire d'Automatique de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, soit assuré de notre gratitude pour son enseignement dans le domaine de l'Automatique et pour l'examen de nos travaux.

Nous tenons à remercier vivement Monsieur FOULARD, Maître de Conférences, dont les conseils, les suggestions et les remarques ont toujours orienté nos recherches et ont permis de les mener à bien.

Nous assurons de notre reconnaissance Monsieur RENARD, Directeur des Etudes et des Services Entretiens aux Papeteries de la Seine et Président du Groupe de Travail "Automatisation des Procédés papetiers", qui a bien voulu nous honorer de sa participation à ce jury.

Que Monsieur CHARUEL, Professeur à l'Ecole Française de Papeterie et Conseiller Scientifique auprès du Centre Technique, trouve ici l'expression de notre gratitude pour l'intérêt qu'il a toujours manifesté à l'égard de notre étude.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Monsieur RAMAZ, chef de Département au Centre Technique et animateur des études d'automatisation, pour l'aide et les encouragements précieux qu'il nous a constamment apportés.

Que tous les membres du Service "Mathématiques Appliquées" du Centre Technique soient assurés de notre reconnaissance pour leur participation active à la réussite de nos travaux.

Nous voulons enfin remercier toutes les personnes qui, au Centre Technique, ont contribué au bon déroulement des différentes phases de nos essais expérimentaux et à la réalisation matérielle de cet ouvrage.

oOo

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION I

FABRICATION DU PAPIER ET INSTALLATIONS DU CENTRE TECHNIQUE III

Le processus de fabrication du papier III

- *Les différentes phases de la transformation* III
- *Principales caractéristiques du papier fabriqué* V

La machine à papier expérimentale du Centre Technique du Papier V

- *Machine à papier expérimentale* VI
- *Instrumentation* VI

Le Calculateur numérique IX

- *Caractéristiques principales* IX
- *Liaisons avec le procédé* X

.../...

Pages

PREMIERE PARTIE 1

IDENTIFICATION DE LA MACHINE A PAPIER EXPERIMENTALE DU CENTRE TECHNIQUE DU PAPIER

1.1. METHODES D'IDENTIFICATION UTILISEES 1

1.1.1. Détermination de la réponse impulsionnelle par intercorrélation 1

1.1.1.1. Principe de la méthode d'intercorrélation 1

1.1.1.2. Séquences binaires pseudo-aléatoires 4

1.1.1.3. Choix des paramètres de la séquence 6

1.1.2. Identification paramétrique à l'aide de la programmation non-linéaire 7

1.1.2.1. Principe de l'identification paramétrique 7

1.1.2.2. Programmation non-linéaire 9

1.1.2.3. Principe général de la méthode du gradient 10

1.1.2.4. Méthode du gradient employée 12

1.1.2.5. Méthode de GAUSS-NEWTON employée 16

1.1.3. Principales remarques sur les méthodes d'identification utilisées 18

1.1.3.1. Identification des retards purs 18

1.1.3.2. Calcul de la fonction d'intercorrélation 18

1.1.3.3. Influence des perturbations 19

1.1.3.4. Comparaison avec d'autres méthodes d'identification 19

1.2. MODELES RECHERCHES 22

1.2.1. Modèle relatif au grammage et à l'humidité du papier 22

1.2.1.1. Représentation du grammage en fonction du débit de pâte 22

1.2.1.2. Représentation de la sècherie 24

1.2.1.3. Intéractions entre les modèles dynamiques de grammage et d'humidité 25

1.2.2. Modèle relatif à la couleur du papier 27

1.2.2.1. Matrice des gains 27

1.2.2.2. Représentation dynamique de la coloration du papier 28

.../...

Pages

1.3. DETERMINATION D'UN MODELE DYNAMIQUE RELATIF AU GRAMMAGE ET A L'HUMIDITE 29

1.3.1. Fonction de transfert liant le grammage sec au débit de pâte 29

1.3.1.1. Conditions d'expérimentation 29

1.3.1.2. Fonction de transfert retenue 30

1.3.2. Fonction de transfert liant l'humidité au débit de pâte 32

1.3.2.1. Conditions d'expérimentation 32

1.3.2.2. Fonction de transfert retenue 32

1.3.3. Fonction de transfert liant l'humidité à la pression de vapeur en post-sècherie 34

1.3.3.1. Conditions d'expérimentation 35

1.3.3.2. Fonction de transfert retenue 35

1.3.4. Etablissement d'un modèle dynamique en variables d'état 38

1.3.4.1. Elaboration d'un modèle général 38

1.3.4.2. Modèle en variables d'état adopté 41

1.4. DETERMINATION D'UN MODELE DYNAMIQUE RELATIF A LA COULEUR 44

1.4.1. Fonctions de transfert liant la couleur aux débits des colorants 44

1.4.1.1. Conditions d'expérimentation 45

1.4.1.2. Fonctions de transfert retenues 46

1.4.2. Etablissement d'un modèle dynamique en variables d'état 48

1.4.2.1. Forme générale du modèle adopté 48

1.4.2.2. Minimalité de la représentation 51

1.5. CONCLUSIONS 52

.../...

Pages

DEUXIEME PARTIE 53

COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE EN ASSERVISSEMENT DE SYSTEMES SOUMIS A DES PERTURBATIONS MESURABLES

2.1. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE COMPORTANT UNE ACTION INTEGRALE 53

2.1.1. Rappel de la structure de commande 53

2.1.1.1. Formulation générale du problème 54
2.1.1.2. Cas d'un horizon infini 55
2.1.1.3. Réalisation d'une action intégrale 56
2.1.1.4. Expression de la commande 58

2.1.2. Calcul de la matrice d'anticipation 60

2.1.2.1. Calcul par intégrations successives 60
2.1.2.2. Calcul algébrique direct 61

2.1.3. Rappel de la structure de l'estimateur-filtre 64

2.1.3.1. Estimation des variables d'état 64
2.1.3.2. Filtrage des mesures 65

2.2. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE EN ASSERVISSEMENT 68

2.2.1. Fonctionnement en asservissement 68

2.2.1.1. Problème des changements de consignes 68
2.2.1.2. Utilisation d'un modèle de référence 70
2.2.1.3. Prise en compte du modèle de référence 71

2.2.2. Calcul d'une commande multidimensionnelle en asservissement 74

2.2.2.1. Expression générale de la structure de commande 74
2.2.2.2. Etude de la matrice de bouclage 75
2.2.2.3. Etude du vecteur d'anticipation 78

2.2.3. Analyse de la solution proposée 81

2.2.3.1. Calcul des différents éléments 81
2.2.3.2. Conditions d'existence 83

.../...

Pages

2.3. COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES 86

2.3.1. Prise en compte des perturbations mesurables 86

2.3.1.1. Calcul de la commande 86

2.3.1.2. Etude de la matrice de bouclage 88

2.3.1.3. Etude du vecteur d'anticipation 90

2.3.1.4. Conditions de validité 92

2.3.2. Calcul unitaire pour le problème global 93

2.3.2.1. Calcul de la commande 93

2.3.2.2. Etude de la matrice de bouclage 96

2.3.2.3. Etude du vecteur d'anticipation 97

2.3.3. Analyse de la solution proposée 98

2.3.3.1. Synthèse des résultats 98

2.3.3.2. Cas particuliers 101

2.3.3.3. Obtention des variables d'état décrivant les perturbations 103

2.4. EXEMPLESDE COMPORTEMENTS EN SIMULATION 105

2.4.1. Etude de la commande en asservissement 105

2.4.1.1. Améliorations apportées par le modèle de référence 108

2.4.1.2. Choix des performances en asservissement 114

2.4.2. Etude de la compensation des perturbations mesurables 121

2.4.2.1. Efficacité de la compensation 121

2.4.2.2. Sensibilité à la connaissance des paramètres 126

2.5. CONCLUSIONS 132

.../...

Pages

TROISIEME PARTIE 133

MISE EN OEUVRE DES COMMANDES SUR LA MACHINE A PAPIER EXPERIMENTALE DU CENTRE TECHNIQUE DU PAPIER

3.1. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE DU GRAMMAGE ET DE L'HUMIDITE 133

3.1.1. Changements des valeurs des consignes 135

3.1.1.1. Changement de la consigne de grammage sec 135

3.1.1.2. Changement de la consigne d'humidité 137

3.1.1.3. Fonctionnement à grammage total constant 137

3.1.2. Réponses à différentes perturbations 139

3.1.2.1. Perturbations dans les circuits de tête de machine 139

3.1.2.2. Perturbationsde vitesse 146

3.1.2.3. Perturbations en sècherie 146

3.1.3. Etude générale de la commande 152

3.1.3.1. Changement du point de fonctionnement statique 152

3.1.3.2. Etude du fonctionnement en palier 154

3.2. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE DE LA COULEUR 160

3.2.1. Changements des valeurs des consignes 161

3.2.1.1. Caractérisation de l'ensemble de commande 161

3.2.1.2. Exemples de résultats obtenus 163

3.2.2. Réponses à différentes perturbations 167

3.2.2.1. Perturbations accidentelles 167

3.2.2.2. Utilisation de pâte colorée 170

3.3. OPTIMISATION STATIQUE DES CONDITIONS DE MARCHE 173

3.3.1. Principe d'optimisation adopté 173

3.3.1.1. Fonctionnement à production maximale 173

3.3.1.2. Algorithme d'optimisation 174

.../...

Pages

3.3.2. Application à l'unité pilote 176

3.3.2.1. Conditions d'expérimentation 176

3.3.2.2. Exemples de résultats obtenus 178

3.4. CONCLUSIONS 182

CONCLUSION 183

ANNEXE 185

ETUDE DE L'EQUATION MATRICIELLE : [X] - [A][X][B] = [C]

BIBLIOGRAPHIE

oOo

INTRODUCTION

Tout à la fois science et technique, l'automatique constitue à l'heure actuelle un domaine d'étude dont les limites vont sans cesse en s'élargissant. Ses multiples aspects et la puissance des méthodologies associées permettent en effet de traiter des questions en apparence fort diverses. Pourtant, ce sont bien les mêmes problèmes fondamentaux qui se retrouvent partout dès qu'il s'agit de conférer à un système les performances désirées : analyse et caractérisation des phénomènes, élaboration d'un ensemble de commande, optimisation de certains éléments de fonctionnement, etc...
Il n'en demeure pas moins vrai que les voies offertes pour parvenir aux résultats souhaités sont parfois très variées et doivent être choisies avec soin. Il appartient donc à l'ingénieur de rechercher les moyens d'investigation les mieux adaptés au problème traité. Ceci implique de pouvoir disposer d'une gamme de méthodes suffisamment large pour que le choix soit effectué en toute connaissance de cause et dans les meilleures conditions. Dans l'industrie, les solutions-miracles universelles ne sont en effet guère réalistes, et il importe de ne pas restreindre à priori l'éventail des méthodes envisageables.

L'emploi en temps réel de calculateurs numériques permet de franchir une nouvelle étape dans l'automatisation des procédés. Il devient en effet ainsi possible d'appliquer industriellement des développements théoriques très sophistiqués, de coordonner les évolutions de nombreux éléments, d'envisager en permanence un meilleur fonctionnement des systèmes considérés. Outre les possibilités d'améliorer notablement les performances, l'implantation d'un calculateur industriel conduit souvent aussi à une meilleure connaissance du processus physique lui-même par les analyses très rationnelles alors indispensables. Il y a une douzaine d'années environ que les études relatives à l'automatisation des machines à papier au moyen de calculateurs numériques ont débouché sur des réalisations pratiques effectives. Suède, Canada, Etats-Unis ont sans doute été les premiers pays concernés par de telles applications, au demeurant diverses par leurs buts et leurs méthodes. En France, l'industrie papetière ne comporte encore que quelques rares installations de ce type, mais il semble bien pourtant que se dessine actuellement une nette tendance en faveur de la mise en oeuvre de la commande par calculateurs numériques.

Le Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses dispose à cette fin d'un Service de Recherche dont le but essentiel est de réaliser une transposition efficace des développements de l'automatique théorique dans cette branche d'activité. La présence d'une machine à papier expérimentale dotée d'un calculateur numérique fonctionnant en temps réel rend alors possible une étape intermédiaire très utile. Nous avons pour notre part cherché à appliquer aux procédés papetiers les résultats relativement récents concernant l'élaboration d'une structure de commande basée sur la théorie de l'optimalisation quadratique. Il a pour cela été tout d'abord nécessaire que nous nous intéressions au problème très important de l'identification dynamique des systèmes.

La PREMIERE PARTIE est donc essentiellement consacrée à l'identification. Après une brève présentation du processus de fabrication du papier et des installations du Centre Technique, nous indiquons les méthodes plus particulièrement utilisées dans les cas considérés et les formes de modèles recherchées. Nous avons en fait établi les représentations dynamiques des deux sous-ensembles que nous nous proposons de commander grammage-humidité et couleur de la feuille de papier. Il s'agit de modèles en variables

.../...

d'état, valables dans les domaines de fonctionnement choisis. En résumant les résultats expérimentaux obtenus sur l'unité pilote, nous mentionnons également les principaux points caractérisant la mise en oeuvre des méthodes retenues.

La DEUXIEME PARTIE est relative aux études théoriques que nous avons menées dans le cadre de la commande de procédés multidimensionnels. Nous présentons en premier lieu une façon assez simple de parvenir à un comportement en asservissement correct d'un système bouclé grâce à l'introduction d'un modèle de référence dans la structure de commande. Nous montrons ensuite comment peut s'effectuer la prise en compte des perturbations mesurables de manière à compenser efficacement leurs effets. Un calcul unitaire permet alors de préciser les éventuelles relations entre les divers éléments constituant le vecteur d'action global. Enfin, plusieurs exemples traités en simulation illustrent les améliorations pouvant être obtenues sur les performances des systèmes ainsi commandés.

La TROISIEME PARTIE rassemble les principaux résultats expérimentaux concernant l'utilisation sur l'unité pilote de commandes multidimensionnelles de la forme précédemment déterminée. Les deux systèmes considérés dans le cadre de cette étude caractérisent le grammage et l'humidité de la feuille de papier d'une part et sa couleur d'autre part. Nous présentons, pour l'un ou l'autre de ces deux ensembles, différents enregistrements relatifs aux changements des valeurs de consignes et aux réponses à plusieurs types de perturbations. Nous apportons par ailleurs certains éléments d'appréciation sur le comportement général de la structure de commande adoptée. Des résultats se rapportant à la mise en oeuvre d'un algorithme d'optimisation statique très simple sont également mentionnés.

Les différentes études expérimentales réalisées sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier sont en très grande partie tributaire de la présence du calculateur numérique relié au procédé. Cet état de fait nous semble bien s'inscrire dans le sens de l'évolution actuellement constatée pour l'automatisation de l'industrie papetière dans les pays les plus avancés en ce domaine.

.../...

FABRICATION DU PAPIER ET INSTALLATIONS DU CENTRE TECHNIQUE

Processus multiple parce que dépendant de nombreux phénomènes étroitement imbriqués, la fabrication du papier est une opération très complexe. Le caractère hétérogène de la matière première utilisée et la difficulté de mesure de certains paramètres de fonctionnement contribuent également à en rendre délicate une maîtrise parfaite.

Le processus de fabrication du papier

La principale matière première actuellement employée pour la fabrication du papier est le bois. Les moyens de parvenir au produit fini restent cependant assez divers et sont évidemment choisis, dans la mesure du possible, en fonctiondes qualités souhaitées pour le papier fabriqué.

- *Les différentes phases de la transformation*

La transformation du bois en papier peut être décomposée en deux phases principales : passage du bois à la pâte à papier, puis de la pâte à papier au papier. Il leur correspond respectivement l'usine de pâte et l'usine de papier. Lorsque ces deux phases sont regroupées en un même lieu, l'usine est dite "intégrée"

La pâte à papier peut être obtenue soit à partir d'un procédé de défibrage purement mécanique, soit à partir d'un procédé à la fois mécanique et chimique. Dans ce dernier cas, le traitement chimique a pour rôle essentiel de dissoudre au cours d'une cuisson les composants non cellulosiques du bois, puis, éventuellement, de blanchir les fibres de cellulose. Cette phase d'obtention de la pâte peut être continue ou discontinue.

La seconde phase commence par une préparation de la pâte au cours de laquelle les fibres sont mises en suspension dans l'eau et raffinées. C'est à ce stade qu'il est alors possible de mélanger plusieurs sortes de fibres et d'ajouter des produits auxiliaires tels que charges et colorants, en fonction des caractéristiques désirées pour le papier. Après ce stade, qui peut être continu ou non, la fabrication va se poursuivre sur la machine à papier et devenir alors strictement continue.

La machine à papier, qui constitue en fait l'objet de notre étude, comporte deux parties assez distinctes. Dans la première partie, ou "partie humide", la pâte convenablement diluée est répartie en un jet plat par la caisse de tête sur une toile sans fin. L'eau s'égoutte à travers cette toile sous l'effet de différents dispositifs d'aspiration (pontuseaux, caisses aspirantes, cylindre aspirant), et la matière fibreuse forme ainsi une feuille qui contient environ 80 % d'eau en fin de toile. L'eau d'égouttage contient une certaine quantité de fibres. Elle est recyclée pour être utilisée dans la dilution de la pâte. La feuille levée en sortie de toile est prise par un feutre, et, après passage dans une section de presses qui ramènent sa teneur en eau aux environs de 60 %, entre dans la seconde partie de la machine, ou "sècherie". Des cylindres chauffés à la vapeur assurent alors le séchage de la feuille qui est enroulée en fin de machine avec une teneur en eau (ou humidité) de l'ordre généralement de 3 à 10 %. Les buées créées par le séchage sont évacuées par des courants d'air chaud.

La figure I résume schématiquement les différentes étapes de la fabrication.

.../...

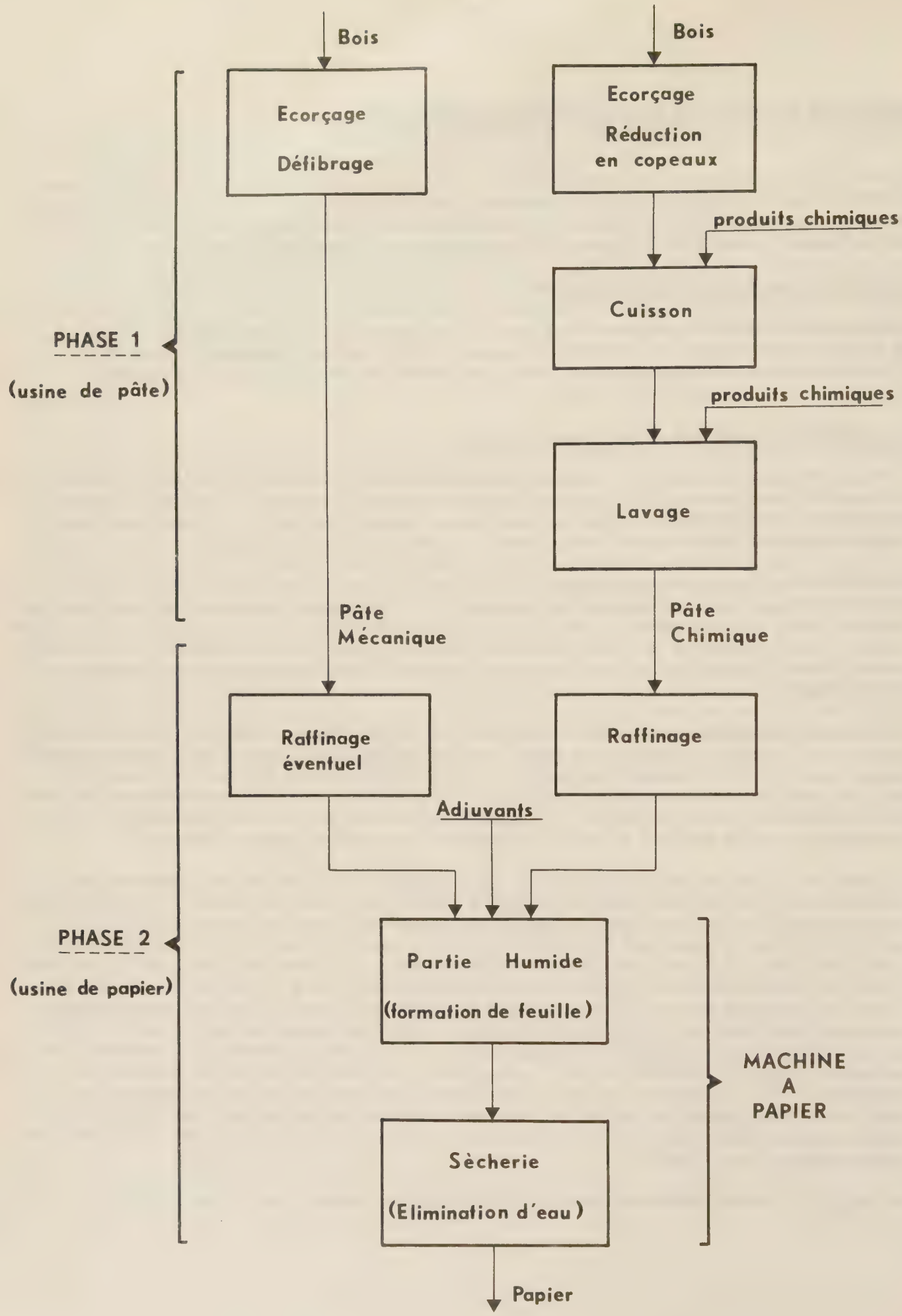


FIGURE I PROCESSUS DE FABRICATION DU PAPIER

- *Principales caractéristiques du papier fabriqué*

Les grandeurs permettant de caractériser les qualités d'un papier sont très nombreuses. Le processus de fabrication du papier est en effet un phénomène très complexe, d'autant plus que l'on utilise une matière première végétale dont certaines propriétés sont encore mal définies. Si certaines caractéristiques du papier peuvent donner lieu à des mesures précises, d'autres demeurent des critères d'appréciation parfois assez subjectifs et difficilement chiffrables. Nous nous bornerons donc simplement à citer celles qui semblent les plus importantes.

Le papier possède tout d'abord des propriétés que l'on pourrait qualifier d'intrinsèques, comme par exemple son grammage, ou poids par unité de surface, son humidité, ou teneur en eau, et son épaisseur. D'autres qualités correspondent à des essais mécaniques : résistances à la traction, au déchirement, au pliage, rigidité, etc... Enfin, il est possible de caractériser l'apparence du papier par sa blancheur ou sa couleur, son opacité, son épair, son lissé, etc...

Bien que les méthodes que nous avons développées tant pour l'identification que pour la commande aient un caractère très général, notre étude expérimentale a porté plus particulièrement sur trois de ces propriétés, qui figurent très certainement parmi les plus fondamentales : le grammage, l'humidité, et la couleur. La régularité de ces trois caractéristiques, d'ailleurs liées entre elles, est en effet une condition indispensable pour l'obtention d'un produit fini de bonne qualité, c'est à dire répondant aux exigences des utilisateurs.

La machine à papier expérimentale du Centre Technique du Papier

Construite initialement pour des études de caractère physique concernant la fabrication du papier, la machine expérimentale du Centre Technique constitue pour les études d'automatisation un procédé-pilote de taille assez importante. Elle permet de réaliser des essais dans des conditions comparables à des essais industriels, mais avec l'avantage de n'être gêné par aucune contrainte de production.

La photographie II présente une vue générale de l'unité pilote.

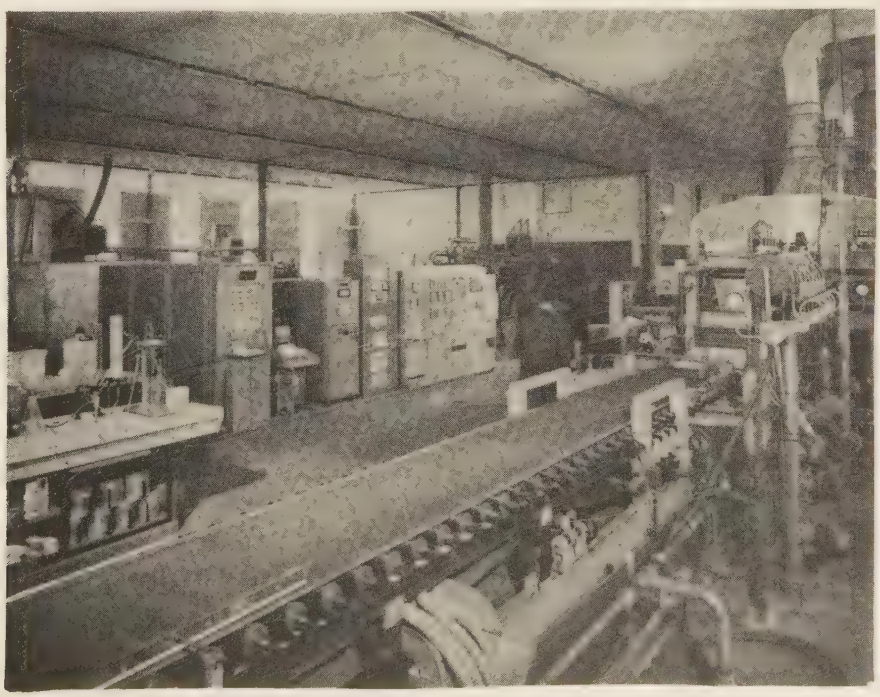


Photo II - Vue générale de l'Unité pilote

.../...

- *Machine à papier expérimentale*

La machine à papier expérimentale du Centre Technique permet de fabriquer le même papier qu'une unité industrielle, dans une gamme de grammage allant de 20 à 200 g/m^2. Le Tableau suivant rassemble les principales caractéristiques de l'unité pilote avec, à titre de comparaison, les valeurs correspondantes pour de grosses unités industriell

CARACTERISTIQUES	UNITE PILOTE	UNITE INDUSTRIELLE
Largeur de la feuille	50 cm	11 m
Vitesse maximale	100 m/mn	1 000 m/mn
Débit maximal en tête	60 m^3/h	5 000 m^3/h
Production maximale	200 kg/h	20 t/h

Il est cependant intéressant de remarquer que l'unité pilote est assez fidèlement homothétique à une machine industrielle, c'est à dire que les rapports entre volumes des cuviers et débits d'alimentation d'une part, et entre la longueur totale de la machine et sa vitesse d'autre part, demeurent sensiblement les mêmes.

L'installation pilote comporte toutes les parties d'une "Usine de papier", telles qu'elles ont été décrites dans un paragraphe précédent.La préparation de la pâte se fait de manière discontinue, à partir de pâtes provenant d'usines ou fabriquées sur place.

La figure III présente le schéma de la machine à papier proprement dite. Il faut noter que le mélange en tête de machine de la pâte et de l'eau blanche s'effectue en cuve de dilution. La sècherie est divisée en deux parties (pré-sècherie et post-sècherie) commandables séparément par action sur les pressions de vapeur correspondantes.

La vitesse générale de la machine est imposée par un moteur électrique à commande par thyristors entraînant l'arbre principal. Des variateurs de vitesses à poulies coniques permettent, à partir de cet arbre principal, de régler les unes par rapport aux autres les vitesses des différentes sections de la machine.

- *Instrumentation*

La machine à papier expérimentale est dotée d'une instrumentation assez complète, tant en ce qui concerne les capteurs que les actionneurs. Nous nous contenterons de citer seulement les éléments utilisés dans le cadre de cette étude d'automatisation.

.../...

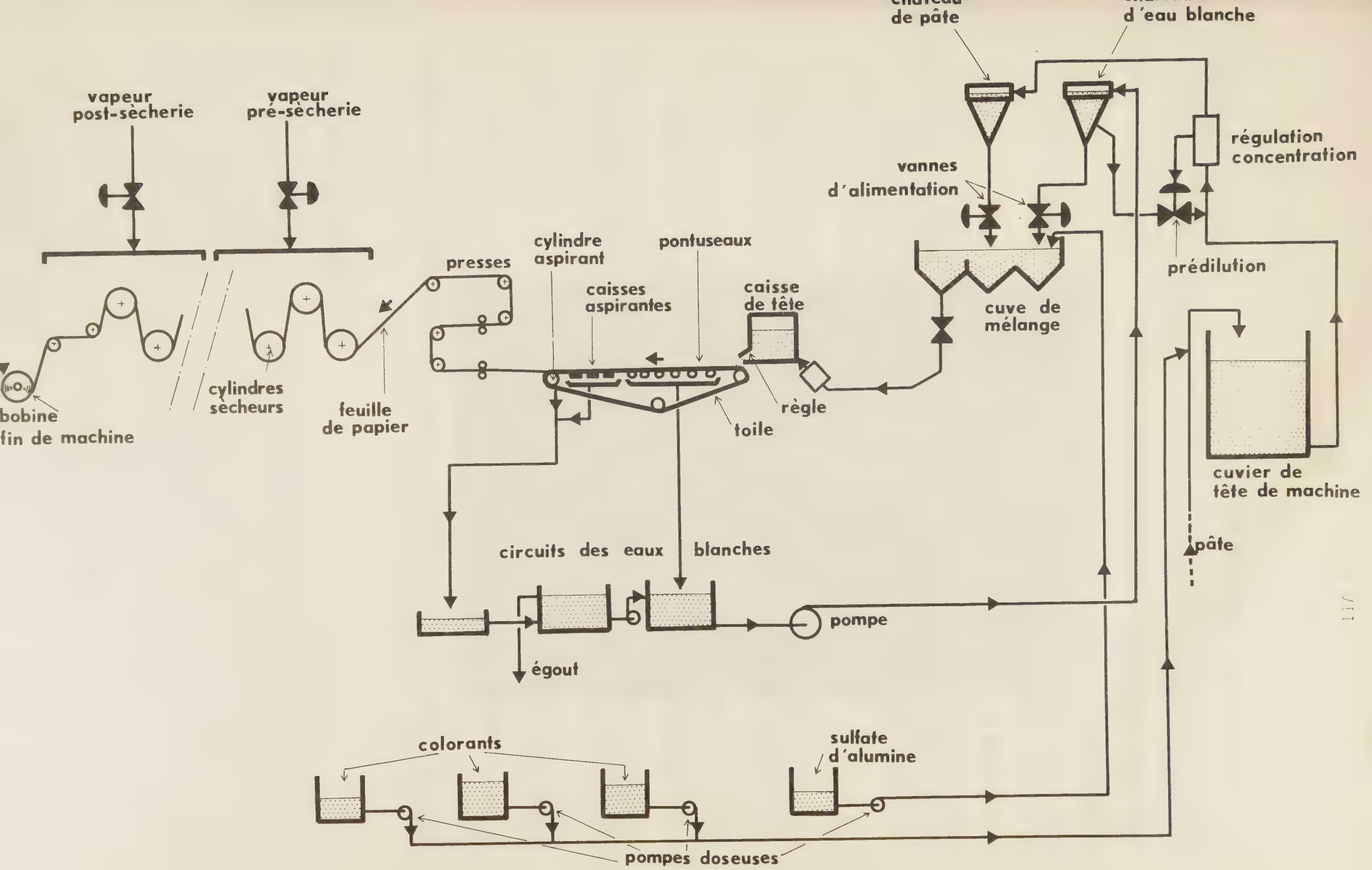


FIGURE III SCHEMA GENERAL DE LA MACHINE A PAPIER EXPERIMENTALE DU C.T.P.

Les principales mesures sont les suivantes

. Mesures des débits d'alimentation en pâte et en eau blanche par débimètres électromagnétiques.

. Mesures des débits de colorants sur pompes doseuses.

. Mesure du pH

. Mesure de la concentration en caisse de tête par un capteur optique mis au point à l'Ecole Française de Papeterie par J. SILVY.

. Mesures des pressions de vapeur en sècherie.

. Mesure du grammage et de l'humidité en fin de machine par un capteur combiné Müller-Barbieri. Le grammage est déduit de la mesure de l'absorption par la feuille de papier d'un rayonnement radioactif β. Un condensateur coplanaire permet d'évaluer l'humidité par la mesure de la constante diélectrique de la feuille.

. Mesure de la couleur du papier en fin de machine par un colorimètre en continu Harrisson.

. Mesure de l'ouverture de règle de la caisse de tête par potentiomètres (pour un débit d'alimentation et un vide en caisse de tête constants, l'ouverture de la règle fixe la vitesse du jet.

. Mesures de différentes vitesses par alternateurs tachymétriques.

Les actionneurs utilisés pour cette étude d'automatisation sont les suivants:

. Vannes pneumatiques associées à des convertisseurs électro-pneumatiques pour la commande des débits de pâte et d'eau blanche et des pressions de vapeur en pré-sècherie et post-sècherie.

. Pompes doseuses pour le réglage des trois débits de colorants et du débit de sulfate d'alumine.

. Moteurs pas-à-pas pour la commande de l'ouverture de la règle de la caisse de tête.

. Moteur à courant continu à commande par thyristors pour fixer la vitesse générale de la machine.

.../...

Le calculateur numérique

L'unité pilote du Centre Technique du Papier est reliée à un calculateur "temps réel" installé sur le site en décembre 1968. La photographie IV présente le pupitre de commande du calculateur et la console TELETYPE associée.

Photo IV - Le calculateur de commande

- *Caractéristiques principales*

Le calculateur industriel couplé à la machine à papier expérimentale est un "Automateur MAT 01" de la Société TELEMECANIQUE ELECTRIQUE. Il utilise une technologie RTL, avec une structure de type "série". Sa mémoire à tores de ferrite, banalisée, comporte 8 192 mots de 21 bits (18 bits de valeur + 1 bit de signe + 1 bit de parité + 1 bit de verrouillage), et le cycle de base est de 6,5 micro-secondes. Le fonctionnement en temps réel est assuré par un système hiérarchisé d'interruptions prioritaires, complété par un système d'exploitation partagée organisant le déroulement des travaux de moindre priorité.

.../...

Le code d'ordres possède 32 instructions de base. La représentation des nombres est faite en convention fractionnaire, avec virgule fixe à gauche, et les opérations arithmétiques et logiques sont cablées.

Le dialogue avec l'opérateur s'effectue par l'intermédiaire du pupitre industriel ou de la console TELETYPE.

- *Liaisons avec le procédé*

Toutes les informations en entrée et en sortie du calculateur sont transmises en mode parallèle.

Environ 80 voies de mesures peuvent être scrutées, dont les plus importantes ont été mentionnées précédemment. Après filtrage analogique et standardisation dans la gamme 0 ± 50 mV, les signaux "bas niveau" sont traités par un ensemble de multiplexage dont la cadence est de 10 voies par seconde. Un amplificateur unique permet alors d'obtenir un signal dans la gamme 0 ± 10 volts pour attaquer le convertisseur analogique-numérique fournissant un mot binaire de 13 bits (c'est à dire 0 ± 4095 points).

Deux mots de 19 bits permettent de connecter également des entrées binaires.

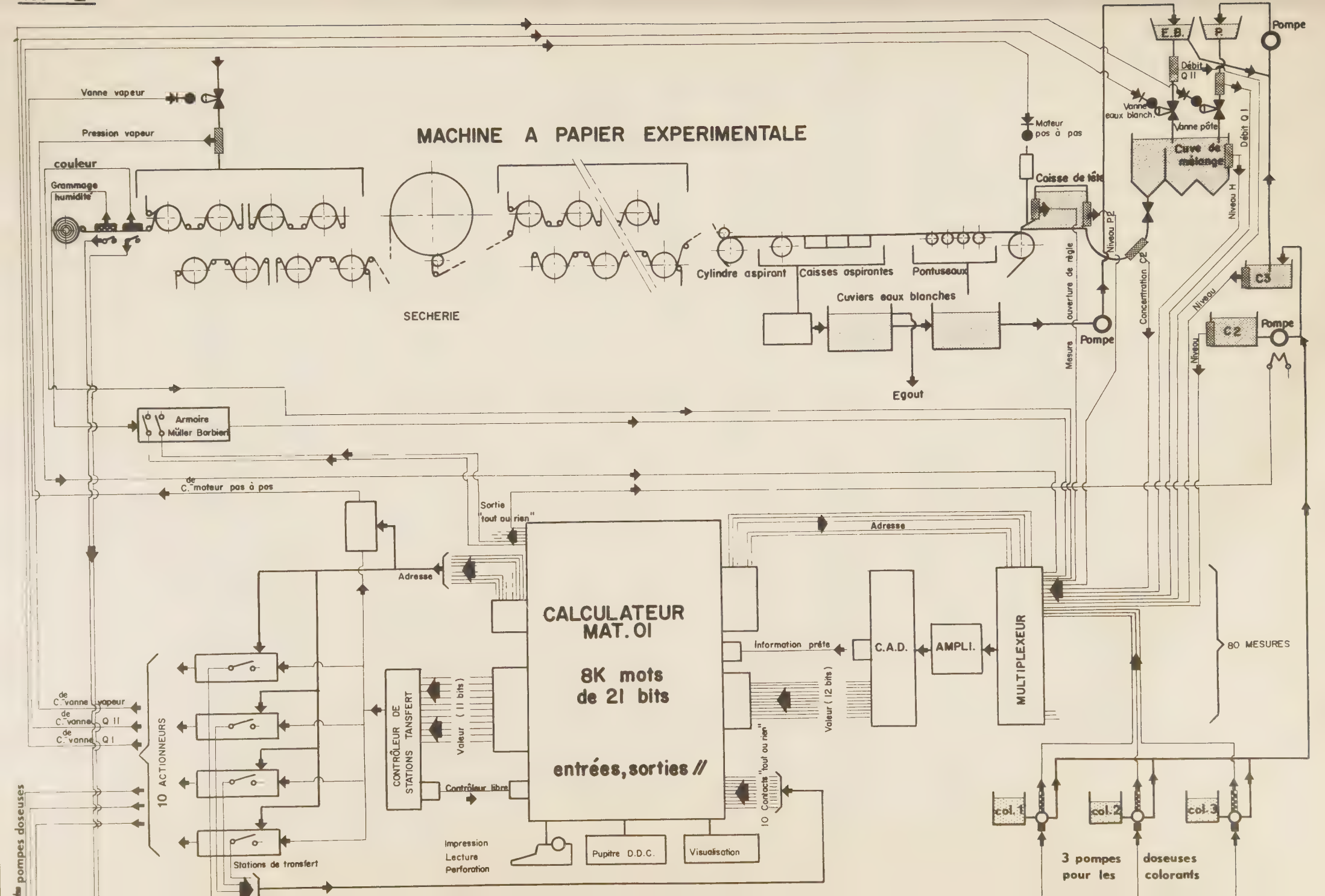
En sortie, le système de "commande numérique directe" est employé : le calculateur agit directement sur les organes d'action par l'intermédiaire de stations de transfert à moteurs pas à pas assurant la conversion numérique- analogique et une mémorisation entre les instants de commande. La commande de ces stations de transfert, dont le nombre est actuellement de 10, se fait par un mot de 11 bits (dont un bit de signe) pour la valeur à sortir et un mot de 5 bits pour l'adresse du périphérique concerné.

Un système un peu particulier est utilisé pour la commande des moteurs pas à pas assurant la modification de l'ouverture de la règle de la caisse de tête, avec une conversion directe de la valeur numérique à sortir en un nombre d'impulsions de fréquence égale à 200 Hz.

Enfin, le calculateur possède évidemment un certain nombre de sorties binaires pour les commandes de type "tout ou rien".

La figure V présente les principales liaisons existant entre le calculateur de commande et l'unité pilote.

oOo


MACHINE A PAPIER EXPERIMENTALE
Vanne vapeur
Pression vapeur
couleur
Grammage humidité
SECHERIE
Cylindre aspirant
Caisses aspirantes
Pontuseaux
Cuviers eaux blanches
Egout
Caisse de tête
Moteur pas à pas
Pompe
E.B.
P.
Débit Q II
Vanne eaux blanch.
Vanne pâte
Cuve de mélange
Débit Q I
Niveau H
Niveau PB
Concentration C2
Mesure
ouverture de règle
C3
C2
Niveau
Armoire Müller Barbier
de C. moteur pas à pas
Sortie "tout ou rien"
Adresse
CALCULATEUR MAT. 01
8K mots de 21 bits
entrées, sorties //
Information prête
C.A.D.
AMPLI.
MULTIPLEXEUR
80 MESURES
Valeur (12 bits)
Valeur (11 bits)
CONTRÔLEUR DE STATIONS TANSFERT
Contrôleur libre
10 Contacts "tout ou rien"
10 ACTIONNEURS
de C. vanne vapeur
de C. vanne Q II
de C. vanne Q I
Stations de transfert
Impression
Lecture
Perforation
Pupitre D.D.C.
Visualisation
col. 1
col. 2
col. 3
3 pompes pour les
doseuses colorants
pompes doseuses

PREMIERE PARTIE

IDENTIFICATION DE LA MACHINE A PAPIER EXPERIMENTALE DU CENTRE TECHNIQUE DU PAPIER

Préalable indispensable à l'élaboration d'une commande performante, l'identification peut se définir comme la recherche d'un modèle mathématique qui, dans un certain domaine de fonctionnement et pour certains types de sollicitations, représente avec une précision suffisante le comportement du système considéré.

Le processus de fabrication du papier est un phénomène très complexe, et nous nous sommes principalement intéressés à la détermination de modèles mathématiques dynamiques représentant certaines caractéristiques essentielles pour la qualité du papier fabriqué, à savoir son poids par unité de surface, sa teneur en eau et sa couleur.

La méthode d'identification développée à cette fin combine un calcul d'intercorrélation effectué en temps réel pour une entrée en séquence binaire pseudo-aléatoire avec un ajustement paramétrique en temps différé par programmation non-linéaire.

1.1. METHODES D'IDENTIFICATION UTILISEES

Les méthodes actuellement proposées pour l'identification des procédés sont nombreuses. Aucune n'ayant un caractère universel, la solution idéale serait d'en posséder un grand nombre en bibliothèque et, pour chaque cas particulier d'expérimentation, d'utiliser celle d'entre elles qui paraît susceptible de donner les meilleurs résultats dans les conditions considérées, et même d'en comparer plusieurs pour effectuer des recoupements intéressants.

Pour notre part, nous avons cherché à développer une méthode qui soit à la fois précise et d'un emploi assez souple, et qui permette de couvrir la plus grande partie du domaine d'application de l'identification dynamique aux processus papetiers. Pour des raisons chronologiques, ce sont les modèles obtenus par cette méthode qui sont actuellement utilisés pour effectuer la commande des procédés correspondants, mais des comparaisons ont été effectuées avec d'autres méthodes. Ces comparaisons ont justifié nos choix a posteriori et ont permis par ailleurs de dégager certains critères d'emploi des différentes techniques envisagées.

La méthode d'identification dynamique que nous avons utilisée se décompose en deux parties. Dans une première phase, un calcul en temps réel de la fonction d'intercorrélation entre une entrée en séquence binaire pseudo-aléatoire et la sortie résultante du procédé fournit la réponse impulsionnelle. La deuxième phase consiste alors en une identification paramétrique de cette réponse impulsionnelle au moyen de la programmation non-linéaire, de façon à obtenir la fonction de transfert du système.

.../...

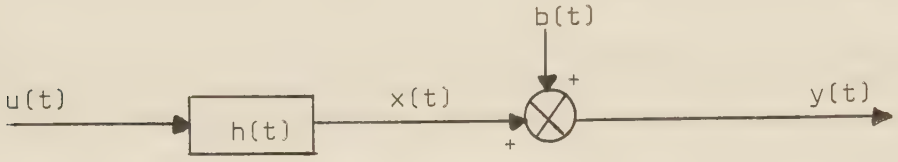
Cette méthode permet de déterminer un modèle de représentation du système, c'est à dire un modèle ne faisant pas appel a priori aux lois physiques sensées décrire le fonctionnement du procédé.

1.1.1. Détermination de la réponse impulsionnelle par intercorrélation

Les méthodes utilisant le calcul d'intercorrélation sont assez nombreuses dans le domaine de l'identification dynamique des procédés. L'intérêt d'employer comme entrée une séquence pseudo-aléatoire est de permettre d'atteindre la réponse impulsionnelle du système sans avoir à effectuer l'opération souvent délicate de déconvolution. Les principales caractéristiques de cette méthode ont déjà fait l'objet de plusieurs études approfondies, notamment par A. MENENDEZ-MARTINEZ [1].(*)

1.1.1.1. Principe de la méthode d'intercorrélation

Considérons la représentation d'un procédé par le schéma suivant, où x(t) est la sortie non bruitée du procédé, b(t) un bruit additif supposé ramené sur la sortie et y(t) la sortie réellement accessible à la mesure.



La réponse impulsionnelle du système est notée h(t), et H(p) en est la fonction de transfert correspondante.

Si $\Gamma uu(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de l'entrée u(t), et $\Gamma ux(\tau)$ la fonction d'intercorrélation entre l'entrée u(t) et la sortie non bruitée x(t), la relation de Wiener-Hopf permet d'écrire :

$$\Gamma ux(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot \Gamma uu(\tau - t)\,dt$$

avec :

$$\Gamma uu(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) \cdot u(t-\tau)\,dt$$

et :

$$\Gamma ux(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) \cdot x(t-\tau)\,dt$$

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie "in fine".

.../...

En fait, seule peut être calculée $\Gamma uy(\tau)$, fonction d'intercorrélation entre l'entrée $u(t)$ et la sortie réelle $y(t)$:

$$\Gamma uy(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) \,.\, y(t-\tau)dt$$

comme $y(t) = x(t) + b(t)$, il vient :

$$\Gamma uy(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t).x(t-\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t).b(t-\tau)dt$$

c'est à dire :

$$\Gamma uy(\tau) = \Gamma ux(\tau) + \Gamma ub(\tau)$$

Par suite, si le bruit $b(t)$ et le signal d'entrée $u(t)$ sont indépendants, et si l'un au moins de ces deux signaux est à moyenne nulle, $\Gamma uy(\tau) \to \Gamma ux(\tau)$ lorsque $T \to \infty$. Pratiquement, le temps de calcul reste toujours fini et le résultat obtenu est donc une estimation de la fonction d'intercorrélation réelle. Cette estimation sera d'autant meilleure que la valeur moyenne de l'un des deux signaux sera plus proche de zéro, car la condition d'indépendance entre le bruit du procédé et l'entrée générée spécialement pour l'identification est très généralement vérifiée.

Supposons alors que le signal d'entrée $u(t)$ soit choisi de manière à avoir une fonction d'autocorrélation proche d'une distribution de Dirac $\delta(t)$. La fonction d'intercorrélation devient :

$$\Gamma ux(\tau) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t).\ \delta(\tau-t)dt$$

c'est à dire, puisque $\delta(t)$ est l'élément unitaire du produit de convolution :

$$\boxed{\Gamma ux(\tau) \simeq h(\tau)}$$

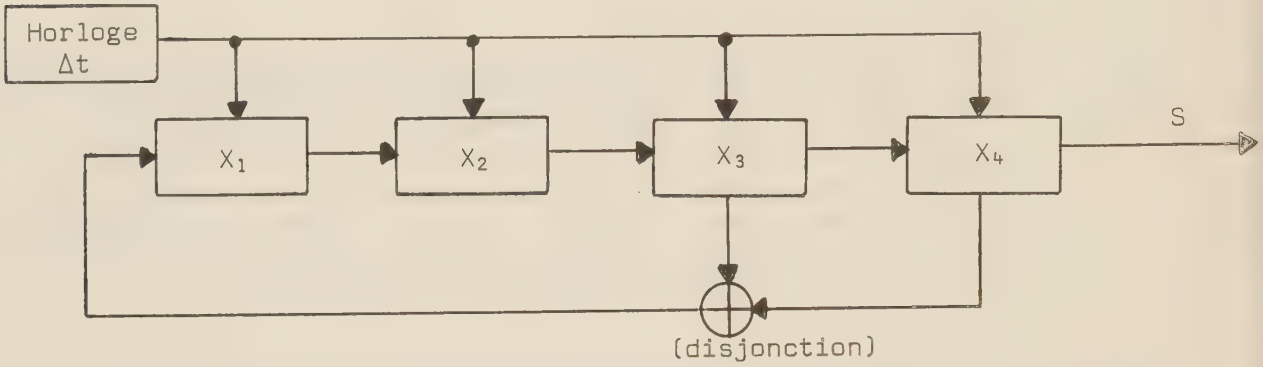
Dans ce cas, le calcul d'intercorrélation fournit donc directement la réponse impulsionnelle $h(t)$ recherchée.

.../...

1.1.1.2. *Séquences binaires pseudo-aléatoires*

Considérons un registre à décalage de N positions possédant une contre-réaction constituée par la disjonction (addition modulo 2) de certains digits Xi contenus dans le registre.

La séquence S délivrée en sortie de ce système est périodique, de période L. La séquence binaire S est dite " de longueur maximale" si $L = 2^N-1$, c'est à dire si le registre prend successivement toutes les configurations possibles avec N digits binaires, sauf la configuration nulle qui bloquerait le système. La figure suivante illustre par exemple le cas d'un générateur binaire pseudo-aléatoire d'ordre 4 fournissant une séquence de longueur maximale L = 15.



Pour chaque valeur de N, il existe une (ou quelquefois plusieurs) façon(s) de réaliser les disjonctions convenables pour obtenir une séquence de longueur maximale. Des tableaux permettent de résumer très simplement ces bouclages optimaux. [1] , [2]

En choisissant pour les deux états binaires les valeurs +1 et -1 la valeur moyenne m d'une séquence de longueur maximale L est donnée par :

$$m = \frac{1}{L}$$

La séquence comporte en effet, dans une période :

$$\begin{cases} 2^{N-1} & \text{valeurs "+1"} \\ 2^{N-1}-1 & \text{valeurs "-1"} \end{cases}$$

Si Δt est la période élémentaire de l'horloge commandant le registre à décalage et en supposant la sortie s(t) du générateur constante sur un intervalle de temps Δt, il est facile de montrer que la fonction d'autocorrélation $\Gamma ss(\tau)$ du signal de sortie a pour expression :

.../...

$$\Gamma ss(\tau) = \frac{1}{L\Delta t} \int_{0}^{L\Delta t} s(t).s(\tau - t)dt = \begin{cases} 1 - \frac{L+1}{L} \cdot \frac{\tau}{\Delta t} & \text{pour} \quad \tau \leq t \\ -\frac{1}{L} & \text{pour} \quad \tau \geq t \end{cases}$$

Cette fonction d'autocorrélation a donc la forme représentée sur la figure 1.1.1.

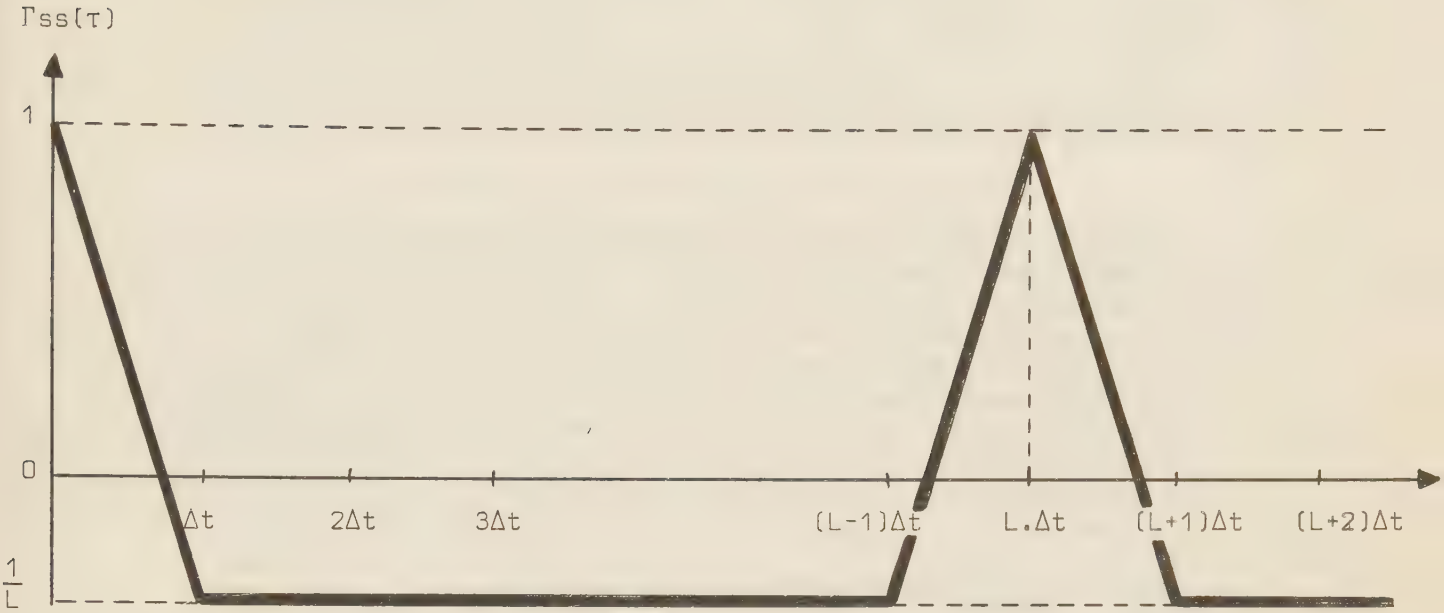


Figure 1.1.1. - FONCTION D'AUTOCORRELATION D'UNE S.B.P.A. DE LONGUEUR MAXIMALE

Sur une période L.Δt il est possible, moyennant certaines hypothèses, d'assimiler cette fonction d'autocorrélation à un pic à l'origine, et d'utiliser cette propriété pour réaliser l'identification de procédés selon le schéma de la figure 1.1.2. [1], [2]

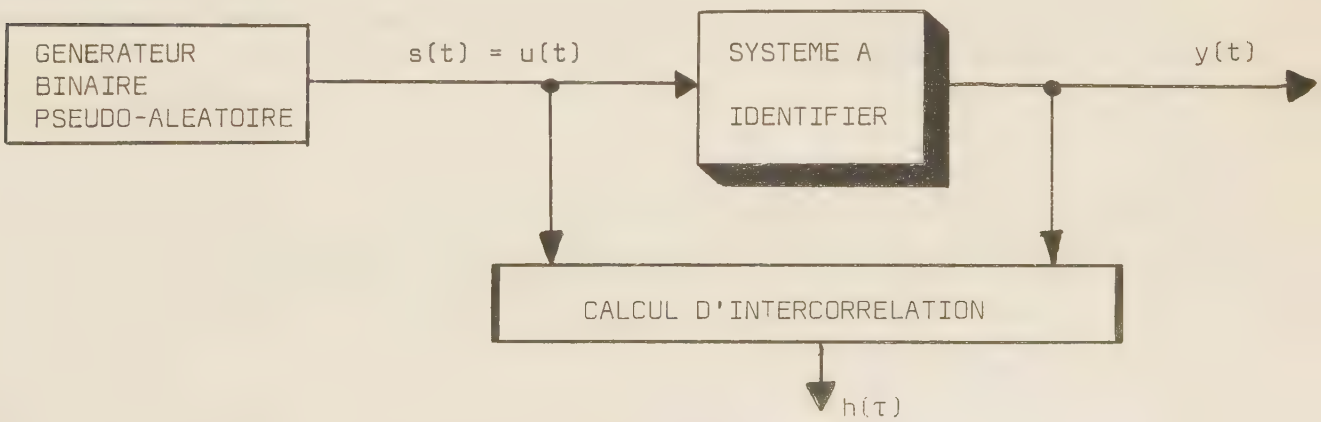


Figure 1.1.2. - IDENTIFICATION PAR SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES

.../...

Si le signal d'entrée réel appliqué au procédé a pour valeurs binaires + a et -a, et si $\Gamma uy(\tau)$ est la fonction d'intercorrélation ainsi calculée, il est montré que la réponse impulsionnelle $h(\tau)$ du système est donnée par l'expression :

$$h(\tau) \simeq \frac{\Gamma uy(\tau)}{a.\Delta t.\frac{L+1}{L}}$$

Pour des raisons de symétrie la première valeur discrète calculée, c'est à dire h(o), doit de plus être multipliée par un facteur égal à 2.

L'identification au moyen des séquences binaires pseudo-aléatoires de longueurs maximales permet donc d'obtenir la réponse impulsionnelle discrétisée du système sans avoir à effectuer un calcul de déconvolution. Ce résultat est très intéressant car la réalisation d'un générateur de séquences binaires pseudo-aléatoires est particulièrement simple lorsqu'un calculateur industriel est couplé au procédé à identifier. Dans le cas contraire, il faut remarquer que de nombreux générateurs pseudo-aléatoires "autonomes" sont actuellement disponibles sur le marché. Il est même éventuellement facilement possible de réaliser le cablage d'un tel dispositif.

1.1.1.3. Choix des paramètres de la séquence

Le premier paramètre à choisir est la période élémentaire "Δt" de l'horloge. Une évaluation sommaire de la bande passante du procédé permet de guider ce choix. Cette période élémentaire doit être en effet au moins inférieure à la plus petite constante de temps (T min) que l'on cherche à identifier. Elle est à prendre généralement de l'ordre de Tmin/10 à Tmin/4.

La période élémentaire étant choisie, il faut alors adopter une longueur de séquence "L" telle qu'il soit possible d'obtenir toute la réponse impulsionnelle. Il faut en effet choisir L pour que la réponse impulsionnelle $h(\tau)$ soit stabilisée pour $\tau \geq L.\Delta t$ (ce qui correspond à un retour à zéro de $h(\tau)$ pour les systèmes stables).

Enfin, le choix de l'amplitude réelle "a" du signal binaire excitant le procédé doit être effectué en fonction du seuil de perturbation admissible sur le procédé et du niveau du bruit déjà présent.

.../...

1.1.2. Identification paramètrique à l'aide de la programmation non-linéaire

La réponse impulsionnelle du système déterminée par la méthode précédemment exposée se présente en fait comme une suite de L valeurs : $h(o)$, $h(\Delta t)$, $h(2\Delta t)$,..... $h[(L-1).\Delta t]$. Dans la pratique, il est souvent plus intéressant de chercher à obtenir une expression de cette "courbe" sous la forme d'une fonction paramétrée, c'est à dire par exemple de déterminer les paramètres de la fonction de transfert continue associée $H(p)$. Nous avons développé dans ce but un programme d'identification paramétrique (en temps différé) pouvant traiter les réponses impulsionnelles obtenues par intercorrélation, mais aussi toute autre forme de courbe (et en particulier des réponses indicielles). Il faut noter aussi qu'une telle approximation réalise un lissage des réponses expérimentales.

1.1.2.1. Principe de l'identification paramétrique

L'identification paramétrique tend à déterminer un modèle représentant "le mieux possible" le procédé réel. Cette notion est évidemment assez vague, et doit donc être précisée. D'une part, la validité du modèle est toujours liée aux conditions de fonctionnement du procédé et à son mode d'excitation, c'est à dire à la quantité d'information contenue dans le signal d'entrée. D'autre part, pour pouvoir juger de la qualité de l'approximation du procédé physique par son modèle, il est nécessaire de fixer un indice de performance, c'est à dire un critère de choix. Le critère que nous avons retenu (et qui est le plus couramment utilisé), est la minimalisation de l'erreur quadratique globale entre la sortie réelle $y(t)$ et la sortie du modèle $\hat{y}(t)$. Ce critère pénalise fortement les écarts importants et présente certains avantages du point de vue mathématique.

Si $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, l'expression du critère est donnée par :

$$J = \int_o^T \varepsilon(t)^2 \, .dt$$

où T est la durée de l'identification.

En fait, pour le traitement par calculateur numérique, une représentation discrète de l'information est utilisée :

$$J = \sum_{i=o}^{L-1} \varepsilon_i^{\,2}$$

avec $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$

Dans ce cas, les instants d'échantillonnage peuvent être soit équidistants (c'est à dire que l'indice "i" caractérise l'instant $i.\Delta t$, où Δt est la période d'échantillonnage), soit quelconques (de façon par exemple à pondérer différemment certaines parties des réponses).

.../...

L'indice de performance étant défini, le problème est donc de déterminer les paramètres du modèle permettant de le minimiser. Il faut pour cela choisir un "mécanisme d'ajustement", c'est à dire une méthode conduisant les paramètres à leurs valeurs optimales. Nous avons dans ce but adopté le principe de la programmation non-linéaire, qui semble bien adapté à l'emploi d'un calculateur numérique.

La figure 1.1.3. illustre le principe de l'identification paramétrique. Il faut souligner que lorsque l'on traite par ce moyen une réponse impulsionnelle obtenue par intercorrélation, l'entrée E(t) est une entrée fictive en impulsion de Dirac, la sortie "réelle" y(t) est le résultat h(t) du calcul d'intercorrélation, et $\hat{y}(t)$ est la réponse impulsionnelle théorique $\hat{h}(t)$ du modèle.

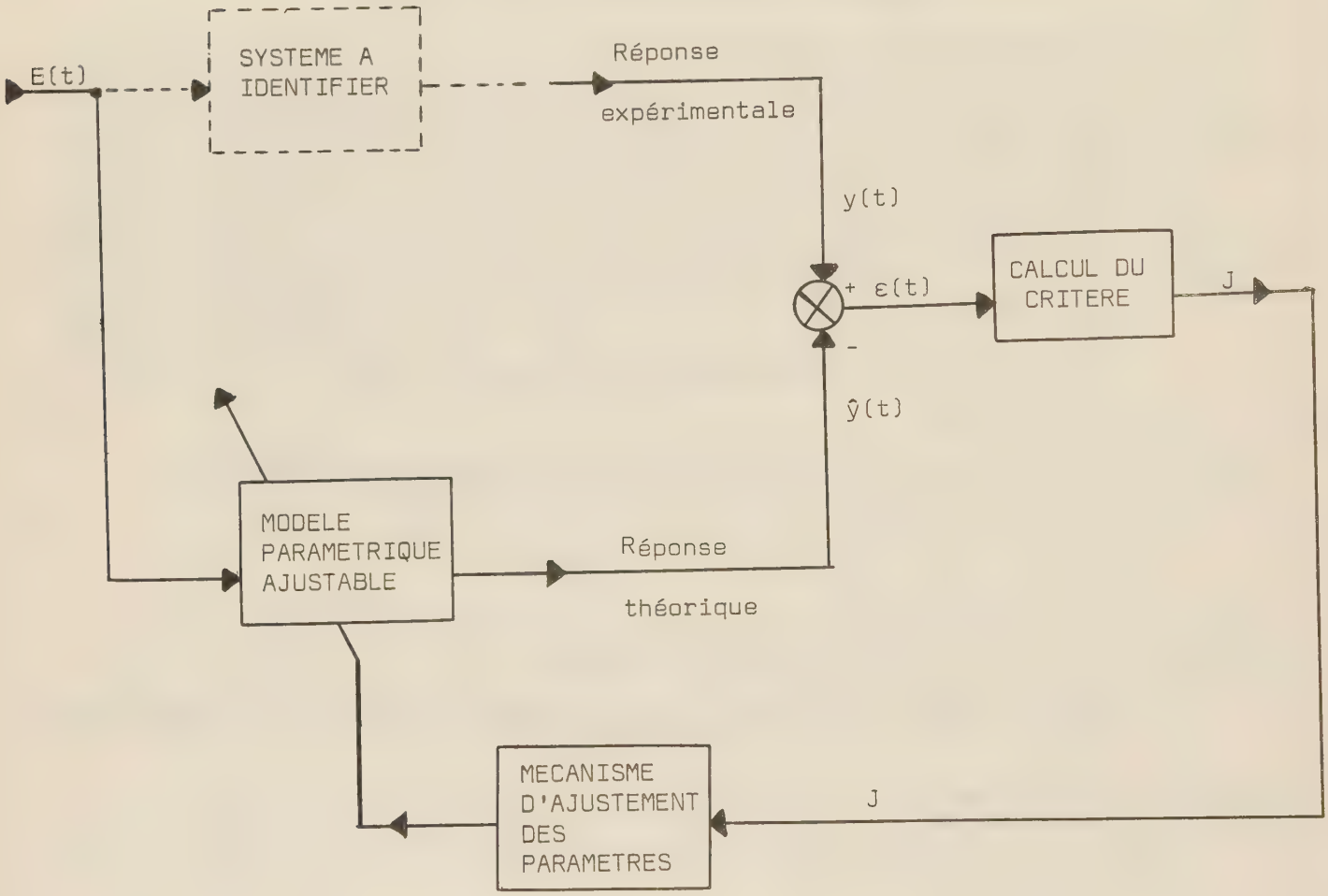


Figure 1.1.3. - IDENTIFICATION PARAMETRIQUE

La structure du modèle paramétrique ajustable doit être défini préalablement, en tenant compte en particulier de l'allure générale des résultats expérimentaux obtenus.

.../...

1.1.2.2. Programmation non-linéaire

Le critère J est fonction des paramètres p_1, p_2,...p_n du modèle ajustable. Nous noterons symboliquement $\vec{P}$ le vecteur rassemblant ces paramètres, et $J(\vec{P})$ le critère correspondant.

L'expression du critère $J(\vec{P})$ définit, dans l'espace des paramètres, des surfaces isocritères. Toutes les méthodes de programmation non-linéaire utilisent des algorithmes qui font progresser les paramètres de façon à passer d'un point situé sur l'isocritère $J(\vec{P}) = Jm$ à un autre point situé sur l'isocritère $J(\vec{P}) = Jn$ de telle manière que Jn soit inférieur à Jm. Par conséquent, le vecteur des paramètres $\vec{P}$ doit bien évoluer vers sa valeur optimale $\vec{P}*$ correspondant au critère minimal $J* = J(\vec{P}*)$.

Il existe de nombreuses méthodes de programmation non-linéaire [2], [3], [4], et le choix doit être effectué pour réaliser un compromis entre différentes exigences :

- convergence de la méthode

- rapidité de progression vers l'optimum

- simplicité des calculs

- précision de la méthode.

En fait, il n'existe pas de méthode de programmation non-linéaire générale. Nous avons pour notre part adopté une combinaison de deux méthodes, comme le propose J.B. BERN [5] :

- méthode du gradient "améliorée"

- méthode de GAUSS-NEWTON

La première de ces deux méthodes permet (sauf cas très spéciaux, ou valeurs initiales des paramètres exagèrement différentes des valeurs optimales) de se rapprocher à coup sûr de l'optimum dans l'espace des paramètres.

La seconde méthode, dont la convergence n'est assurée qu'au voisinage de l'optimum, permet la caractérisation de cet optimum avec une bonne précision et un nombre d'itérations relativement restreint.

Nous utilisons donc les complémentarités de ces deux méthodes pour réaliser tout d'abord une première approche sommaire de l'optimum par la méthode du gradient, puis une détermination plus précise par la méthode de GAUSS-NEWTON.

.../...

1.1.2.3. *Principe général de la méthode du gradient*

En un point quelconque P de l'hyperespace des paramètres, où le critère vaut $J(\vec{P})$, le vecteur gradient est un vecteur de même dimension que $\vec{P}$ défini par :

$$\left(\frac{\vec{\delta J}}{\delta P}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\delta J}{\delta p_1} \\ \frac{\delta J}{\delta p_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\delta J}{\delta pn} \end{bmatrix}$$

Ce vecteur est normal à la surface isocritère au point considéré. En effectuant un développement limité au premier ordre de la fonction J au voisinage de ce point, il est facile de montrer qu'un "déplacement" élémentaire $\Delta\vec{P}$ colinéaire au vecteur gradient et de sens contraire entraîne une diminution du critère ; c'est à dire que l'on a alors :

$$J(\vec{P} + \Delta\vec{P}) < J(\vec{P})$$

Si $\vec{P}i$ représente le vecteur des paramètres après la $i^{ème}$ itération, nous prendrons comme formule itérative :

$$\boxed{\vec{P}i+1 = \vec{P}i - \alpha . \left(\frac{\vec{\delta J}}{\delta P}\right)_{\vec{P}i}}$$

où α est un nombre positif.

Le problème majeur de la méthode du gradient est sans doute le choix judicieux de cette valeur positive α, qui peut être considérée comme un gain dans la boucle d'itération. Ce choix est très important, car il conditionne toute l'efficacité de la méthode :

* un gain α trop faible permet bien, en théorie, d'atteindre l'optimum recherché avec une bonne précision, mais ceci au prix d'un nombre d'itérations prohibitif. A la limite, avec un nombre d'itérations infini et un pas infinitesimal, la trajectoire dans l'hyperespace des paramètres suivrait exactement la ligne de plus grande pente. La figure 1.1.4. illustre ce cas.

  (Les figures explicatives sont faites pour un vecteur des paramètres $\vec{P}$ à deux dimensions afin de permettre des représentations aisées. Mais les méthodes explicitées n'imposent évidemment pas de limitation théorique au nombre des paramètres du modèle.)

.../...

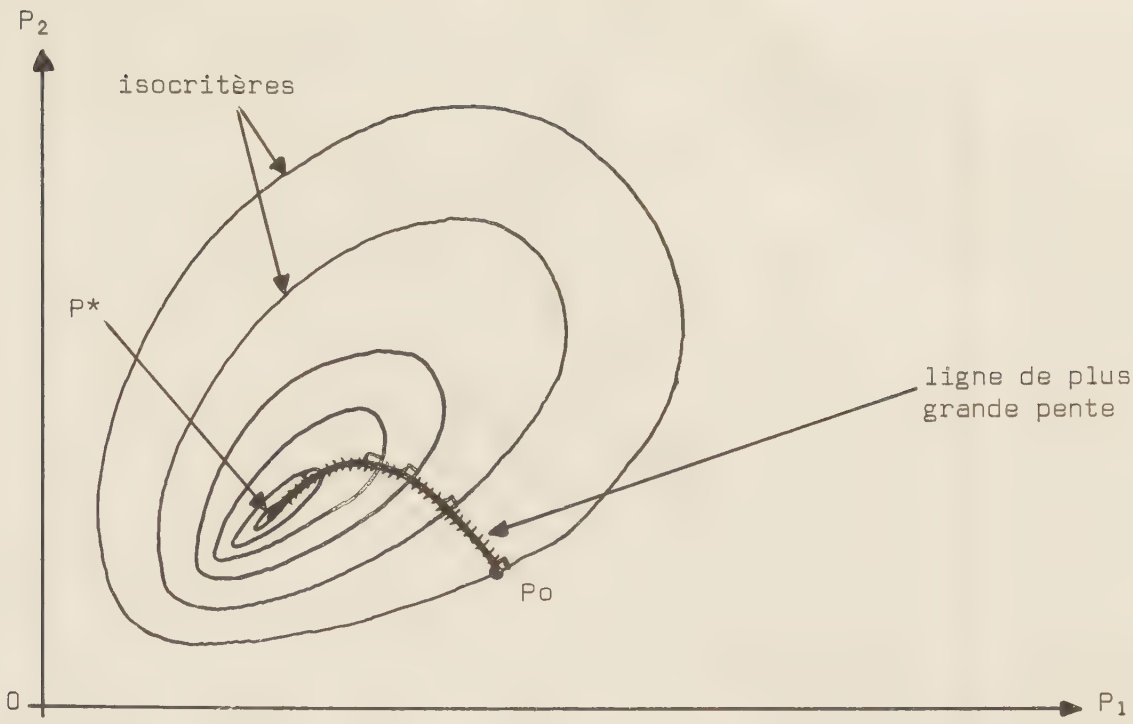
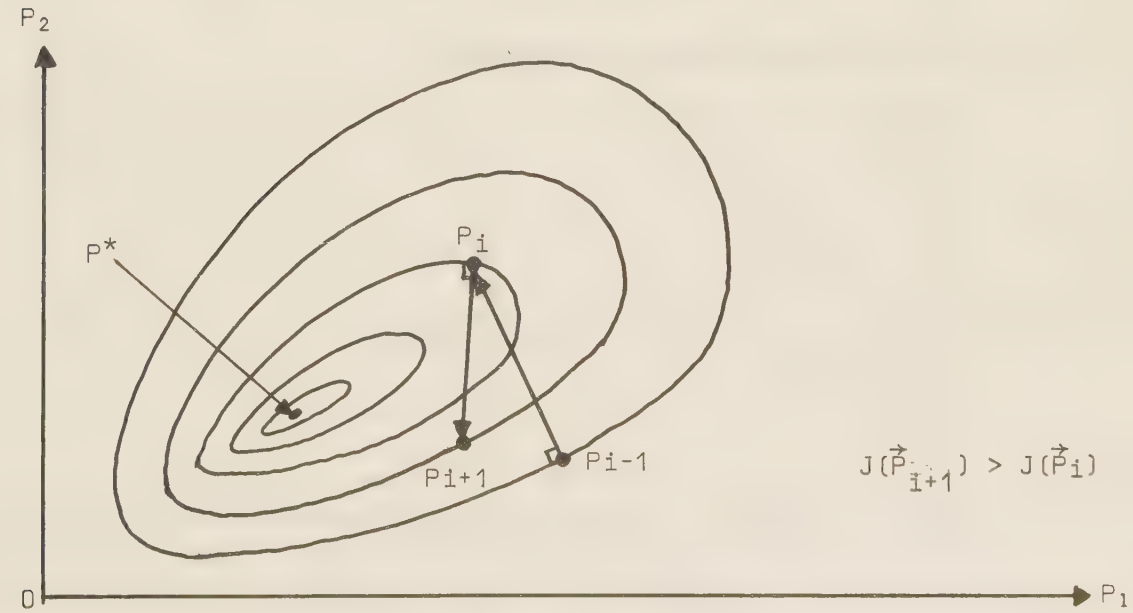


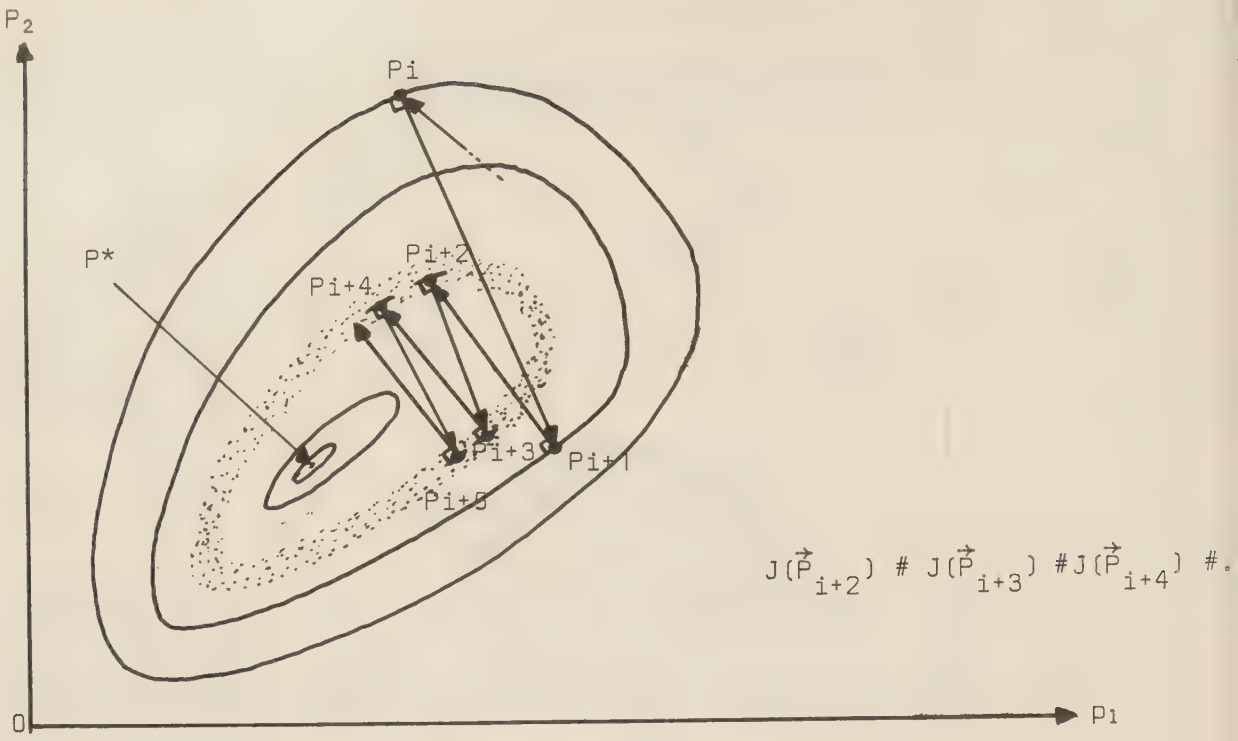
Figure 1.1.4. - METHODE DU GRADIENT : α TROP FAIBLE

* un gain α trop élevé permet bien au contraire de limiter le nombre d'itérations, mais la trajectoire suivie dans l'espace des paramètres s'écarte alors notablement de la ligne de plus grande pente et la méthode peut conduire à des oscillations autour de l'optimum, ou même diverger. Les figures 1.1.5.(a) et 1.1.5.(b) illustrent ces deux possibilités.



(a) : Divergence

.../...



(b) : oscillations

Figure 1.1.5. - METHODE DU GRADIENT : α TROP GRAND

En fait, il apparaît à l'étude qu'une valeur fixe du coefficient α permet difficilement d'obtenir une bonne efficacité de la méthode. Afin de concilier la convergence avec un volume de calcul acceptable, nous avons donc choisi d'adopter un gain α variable.

1.1.2.4. Méthode du gradient employée

La"meilleure" solution pour le choix du coefficient α consisterait sans doute, à chaque calcul du gradient, à déterminer α_i^* tel que :

$$J(\vec{P}_i - \alpha_i^* . (\frac{\vec{\delta J}}{\delta P})_{\vec{P}_i}) \leq J(\vec{P}_i - \alpha . (\frac{\vec{\delta J}}{\delta P})_{\vec{P}_i}) \quad \forall \alpha \geq 0$$

c'est à dire à déterminer le minimum du critère sur la demi-droite définie par :

$$- (\frac{\vec{\delta J}}{\delta P})_{\vec{P}_i}$$

Mais cette méthode, illustrée par la figure 1.1.6., est assez lourde car elle oblige d'une part à effectuer les calculs propres à la méthode du gradient, et d'autre part à leur adjoindre un programme de dichotomie.

.../...

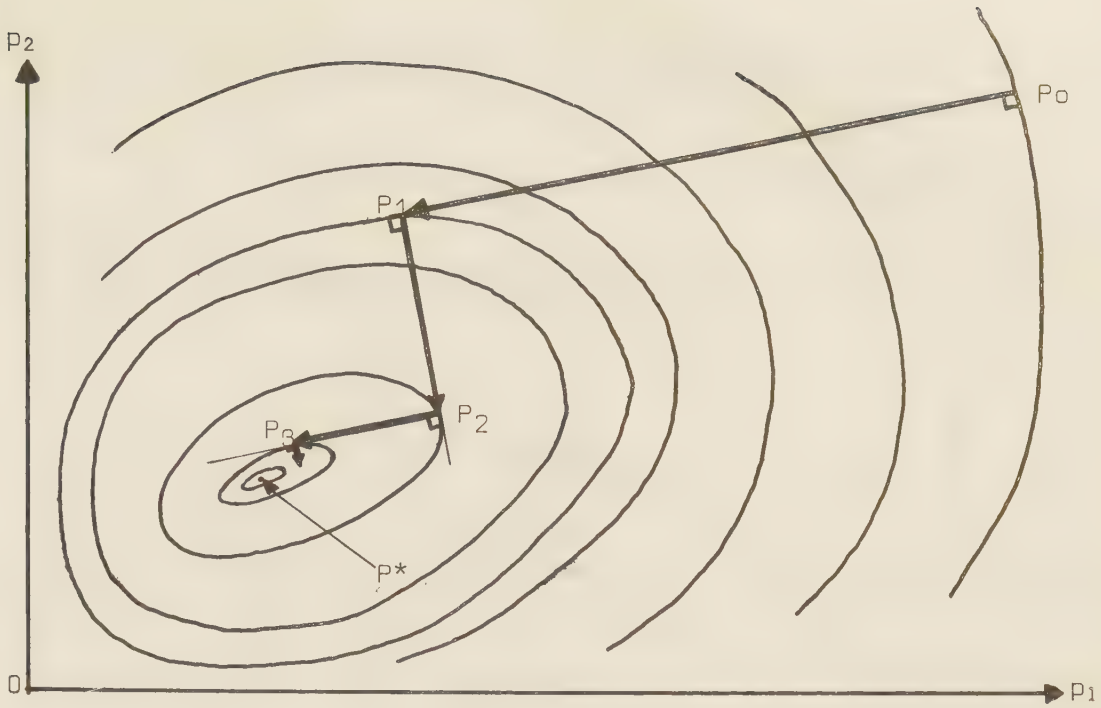


Figure 1.1.6. - METHODE DU GRADIENT AVEC RECHERCHE DICHOTOMIQUE

Or, puisqu'elle est complétée par la méthode de GAUSS-NEWTON, le but de cette méthode du gradient n'est pas d'atteindre l'optimum avec une grande précision, mais simplement de s'en rapprocher le plus rapidement possible dans l'espace des paramètres. Nous avons donc choisi d'effectuer dans la direction $-(\frac{\delta J}{\delta P})_{\vec{P}_i}$ une recherche assez simple dont nous allons exposer brièvement le principe. [2]

Considérons dans l'espace des paramètres le passage du point P_i au point P_{i+1} par l'algorithme du gradient.

Deux cas peuvent alors se présenter, selon le sens d'évolution du critère :

- 1er cas : $J(\vec{P}_{i+1}) < J(\vec{P}_i)$

  Le point P_{i+1} est donc meilleur que le point P_i au sens de l'indice de performance choisi.

  Il est alors possible, à partir du point P_i, de progresser dans la direction $-(\frac{\delta J}{\delta P})_{\vec{P}_i}$ en déterminant de nouveaux points P_{i+2}, P_{i+3},.... P_{i+k},....., correspondant à des valeurs du coefficient α données respectivement par : $\alpha_{i+2} = \gamma.\alpha_{i+1}$, $\alpha_{i+3} = \gamma.\alpha_{i+2}$,.... $\alpha_{i+k} = \gamma.\alpha_{i+k-1}$, ..., où γ est un coefficient empirique fixe supérieur à l'unité, que l'expérience nous a conduits à choisir de l'ordre de 1,2 à 1,5.

.../...

Ce processus de multiplication du gain α est itéré tant que $J(\vec{P}_{i+k})$ est inférieur à $J(\vec{P}_{i+k-1})$. Au dernier point P_{i+q} vérifiant cette condition, c'est à dire tel que :

$$J(\vec{P}_{i+q}) < J(\vec{P}_{i+q-1}) \text{ et } J(\vec{P}_{i+q}) < J(\vec{P}_{i+q+1})$$

un nouveau gradient est calculé pour continuer la progression en direction de l'optimum, comme l'indique la figure 1.1.7.

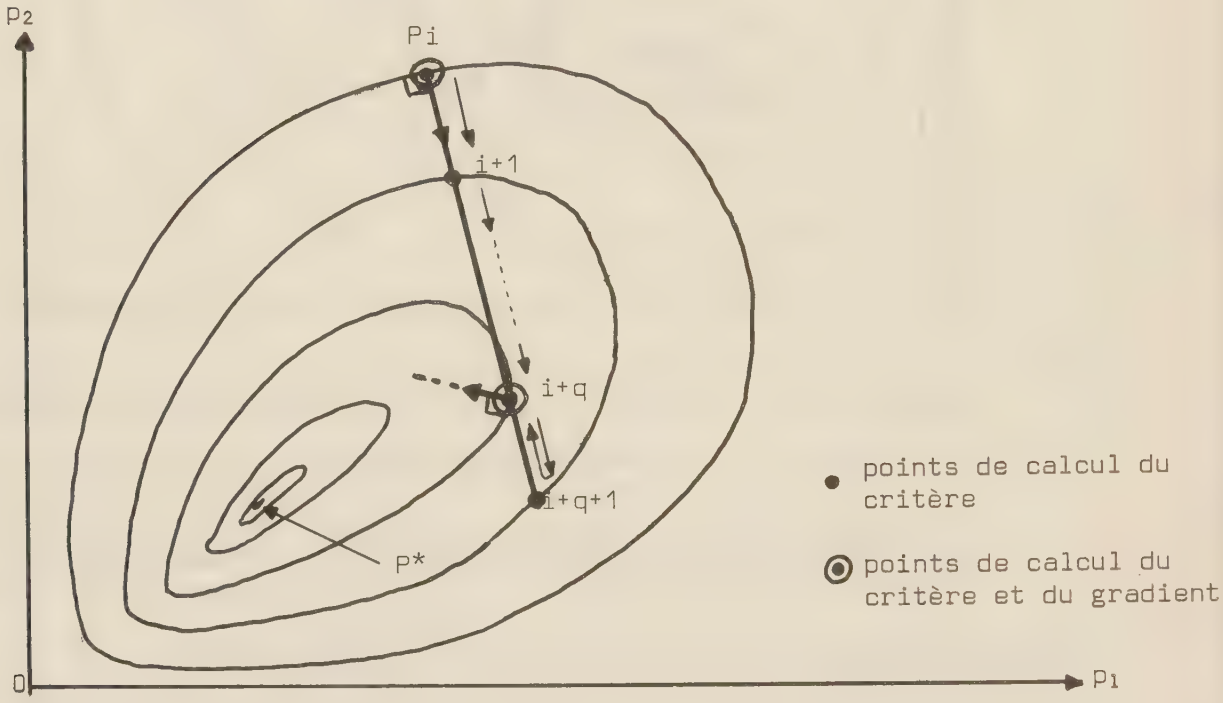


Figure 1.1.7. - PROCESSUS DE MULTIPLICATION DU GAIN α

- 2e cas : $J(\vec{P}_{i+1}) > J(\vec{P}_i)$

Le point P_{i+1} est alors à rejeter, et nous effectuons entre les points P_i et P_{i+1} une recherche très comparable à la précédente, mais en réalisant cette fois des divisions successives du gain α par le coefficient γ. C'est à dire que nous obtenons successivement des points P_{i+2}, P_{i+3}, ..., P_{i+k}, ..., correspondant respectivement à $\alpha_{i+2} = \alpha_{i+1}/\gamma$, $\alpha_{i+3} = \alpha_{i+2}/\gamma, \ldots, \alpha_{i+k} = \alpha_{i+k-1}/\gamma, \ldots$. Ce processus de division du gain α est itéré jusqu'à la détermination d'un point P_{i+r} tel que :

$$J(\vec{P}_{i+r}) < J(\vec{P}_i)$$

pour lequel on effectue de nouveau le calcul de gradient, comme l'illustre la figure 1.1.8.

.../...

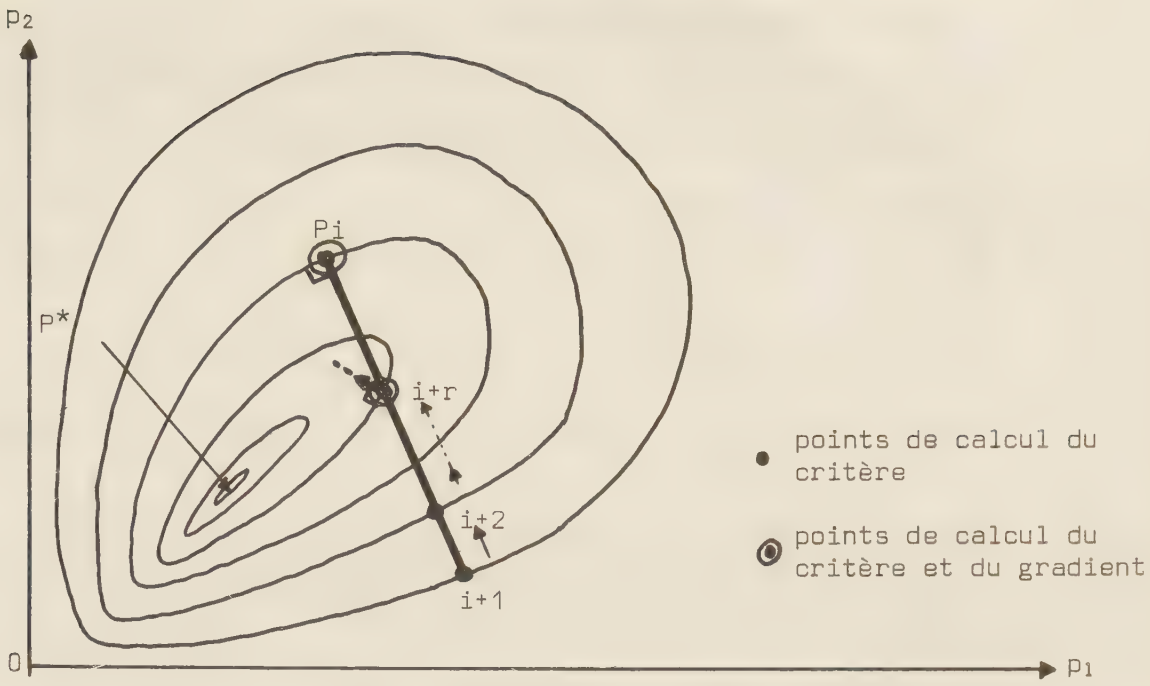


Figure 1.1.8. - PROCESSUS DE DIVISION DU GAIN α

Le nouveau gradient n'étant calculé, quel que soit le cas rencontré, qu'au point finalement retenu, cette méthode de recherche simplifiée est rapide. Au point P_i de l'espace des paramètres le critère est en effet donné par :

$$J(\vec{P}_i) = \sum_{j=o}^{L-1} [\hat{y}_j(\vec{P}_i) - y_j]^2$$

Les composantes du gradient en ce point ont ainsi pour expressions :

$$(\frac{\vec{\delta J}}{\delta P})_{\vec{P}_i} = 2. \sum_{j=o}^{L-1} \{ [\hat{y}_j(\vec{P}_i) - y_j] \cdot [\frac{\overrightarrow{\delta \hat{y}_j(\vec{P})}}{\delta P}]_{\vec{P}_i} \}$$

Leur complexité augmente très vite avec le nombre de paramètres du modèle, et il est donc très intéressant d'en effectuer les calculs le moins souvent possible.

.../...

1.1.2.5. Méthode de GAUSS-NEWTON employée

Cette méthode est basée sur l'algorithme de NEWTON-RALPHSON qui permet de déterminer la valeur u* du paramètre u annulant la fonction f(u). L'algorithme de NEWTON-RALPHSON a pour expression :

$$u_{i+1} = u_i - \beta \cdot \frac{f(u_i)}{f'(u_i)}$$

avec $f'(u_i) = \left(\frac{df}{du}\right)_{u_i}$

Pour des raisons de convergence , le gain d'itération β est généralement pris égal à l'unité.

Dans le cas de l'identification paramétrique, cette méthode est appliquée à la recherche du vecteur $\vec{P}^*$ (de dimension n) qui annule simultanément les n composantes du gradient. Ceci correspond donc bien à un extrêmum du critère, que l'on montre être un minimum.

L'algorithme vectoriel de NEWTON-RALPHSON s'écrit alors :

$$\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i - [\Phi(\vec{P}_i)]^{-1} \cdot \left(\frac{\vec{\delta J}}{\delta P}\right)_{\vec{P}_i}$$

où $[\Phi(\vec{P}_i)]$ est la matrice des dérivées secondes du critère au point P_i, d'éléments $(\phi_{k\ell})_{\vec{P}_i}$ donnés par :

$$(\phi_{k\ell})_{\vec{P}_i} = (\phi_{\ell k})_{\vec{P}_i} = \left(\frac{\delta^2 J}{\delta_{pk} \cdot \delta_{p\ell}}\right)_{\vec{P}_i}$$

soit :

$$(\phi_{k\ell})_{\vec{P}_i} = \frac{\delta}{\delta p_k} \left\{2. \sum_{j=o}^{L-1} [\hat{y}_j(\vec{P}_i) - y_j] .\left[\frac{\delta \hat{y}_j(\vec{P})}{\delta p_\ell}\right]_{\vec{P}_i}\right\}$$

ou encore, avec une notation abrégée :

$$\phi_{k\ell} = 2. \sum_{j=o}^{L-1} [(\hat{y}_j - y_j). \frac{\delta^2 \hat{y}_j}{\delta p_k . \delta p_\ell}] + 2. \sum_{j=o}^{L-1} [\frac{\delta \hat{y}_j}{\delta p_k} . \frac{\delta \hat{y}_j}{\delta p_\ell}]$$

L'approximation de GAUSS consiste, pour simplifier ce calcul, à négliger le premier terme de l'expression précédente pour ne conserver que le second, qui se calcule facilement en même temps que les composantes du gradient.

.../...

La matrice des dérivées secondes du critère $[\Phi(\vec{P}_i)]$ est donc approchée par une matrice plus simple $[G(\vec{P}_i)]$ d'éléments $(g_{k\ell})_{\vec{P}_i}$ définis par :

$$(g_{k\ell})_{\vec{P}_i} = (g_{\ell k})_{\vec{P}_i} = 2 \cdot \sum_{j=o}^{L-1} \left[\frac{\delta \hat{y}_j(\vec{P})}{\delta p_k} \cdot \frac{\delta \hat{y}_j(\vec{P})}{\delta p_\ell}\right]_{\vec{P}_i}$$

L'algorithme de GAUSS-NEWTON s'écrit alors :

$$\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i - [G(\vec{P}_i)]^{-1} \cdot \left(\frac{\vec{\delta J}}{\delta P}\right)_{\vec{P}_i}$$

L'approximation de GAUSS, qui évite le calcul généralement très lourd des dérivées secondes du critère, n'est valable qu'au voisinage de l'optimum. L'emploi de cette méthode rend donc bien indispensable d'effectuer au préalable une première approche de l'optimum, par exemple par la méthode du gradient. La convergence de l'algorithme de GAUSS-NEWTON est alors très rapide.

En fin d'itération, il est souvent aisé d'améliorer sensiblement les performances de la méthode en employant un processus de division du gain analogue à celui que nous avons explicité pour la méthode du gradient.

Lorsque l'optimum est atteint, il est possible d'avoir une estimation de la matrice des variances-covariances des paramètres par l'expression :

$$[V(\vec{P}^*)] = \sigma^2 \cdot [G(\vec{P}^*)]^{-1}$$

où σ^2 représente la variance de l'écart résiduel $\varepsilon_j^* = y_j - \hat{y}_j(\vec{P}^*)$.

Cette matrice $[V(\vec{P}^*)]$ permet donc d'apprécier l'intervalle de confiance des paramètres obtenus.

.../...

1.1.3. Principales remarques sur les méthodes d'identification utilisées

L'emploi comme signal d'entrée d'une séquence binaire pseudo-aléatoire de longueur maximale présente l'avantage d'une bonne excitation des différents modes du système puisque ce signal, proche d'un bruit pseudo-blanc, possède un spectre fréquentiel relativement étendu. De plus, une telle entrée perturbe peu le système à identifier, condition très souvent indispensable pour une utilisation industrielle.

Par ailleurs, différentes remarques peuvent être faites sur certaines propriétés des méthodes employées. Elles sont basées sur de nombreux essais expérimentaux et utilisent également des résultats obtenus en simulation.

1.1.3.1. Identification des retards purs

Les réponses temporelles à identifier présentent souvent des retards purs, soit parce que le système comporte effectivement un tel élément (par exemple le temps de passage de la feuille dans une machine à papier), soit parce qu'on l'introduit artificiellement dans le modèle de représentation pour approcher certains phénomènes complexes.

L'introduction d'un paramètre "retard pur" dans l'algorithme d'identification par programmation non-linéaire est possible, mais les expressions de la sortie du modèle et des composantes du gradient sont alors nettement plus compliquées.

Or, il est en général assez aisé d'avoir une première idée de la valeur du retard pur en fonction de l'allure de la fonction temporelle à identifier. Nous avons donc préféré programmer les essais successifs de plusieurs valeurs de ce paramètre à l'intérieur d'un intervalle de recherche qu'il est facile de choisir au vu de la réponse expérimentale. La valeur retenue pour le retard pur, en nombre entier de périodes d'échantillonnage, est celle qui permet d'obtenir le critère total le plus faible.

Cette procédure est valable aussi bien pour les réponses impulsionnelles obtenues par intercorrélation que pour d'autres fonctions temporelles telles que, par exemple, les réponses indicielles.

1.1.3.2. Calcul de la fonction d'intercorrélation

Le signal d'entrée binaire pseudo-aléatoire étant périodique, le calcul de la fonction d'intercorrélation doit être effectué sur un nombre entier de périodes. Cette condition est en effet, indispensable pour conserver les propriétés caractéristiques du signal.

Les courbes des figures 1.1.9(A) et 1.1.9.(B) illustrent un calcul d'intercorrélation effectué sur un modèle de simulation pour une séquence binaire pseudo-aléatoire de longueur L = 63.

.../...

Nous avons généralement obtenus de bons résultats en calculant la fonction d'intercorrélation sur la longueur d'une seule séquence. Mais, dans le cas d'un niveau de bruit particulièrement élevé, le calcul sur plusieurs séquences permet évidemment de diminuer son influence sur la qualité de l'identification.

Enfin, il paraît important d'éviter, dans la mesure du possible, de commencer le calcul d'intercorrélation dès la première séquence, au cours de laquelle s'effectue la mise en "régime permanent" du système.

1.1.3.3. Influence des perturbations

D'après de nombreuses études réalisées tant en simulation que sur des systèmes réels, il semble que la méthode d'identification par séquences binaires pseudo-aléatoires demeure très efficace même lorsque le rapport "signal/bruit" n'est pas très élevé. Par ailleurs, l'identification paramétrique de la réponse impulsionnelle au moyen de la programmation non-linéaire assure un certain lissage de la courbe obtenue expérimentalement.

Nous avons également étudié succintement l'influence d'une dérive sur la qualité de l'identification. Les résultats en sont résumés dans une autre publication [2], et nous nous bornerons ici à rappeler que le calcul d'intercorrélation est très sensiblement perturbé par la présence d'une dérive. A. MENENDEZ-MARTINEZ propose des méthodes permettant d'améliorer la qualité de l'identification en présence de dérives linéaires. Il est aussi possible, lors de l'identification paramétrique de la réponse impulsionnelle, d'introduire dans le modèle des paramètres ajustables supplémentaires pour caractériser cette dérive.

1.1.3.4. Comparaison avec d'autres méthodes d'identification

Une étude comparative [6] portant sur la méthode précédente et trois autres méthodes d'identification dynamique a été réalisée. Ces trois autres méthodes [7], utilisant directement les données "entrée-sortie" du procédé pour établir un modèle discret, sont les suivantes :

- méthode du maximum de vraisemblance [8]

- méthode des moindres carrés généralisés [9]

- méthode de la matrice instrumentale [10]

Ces méthodes permettent en particulier de prendre en compte assez facilement dans le modèle les éventuelles dérives.

D'une manière générale, il apparaît que les résultats obtenus avec la méthode choisie sont très voisins des résultats donnés par la méthode du maximum de vraisemblance qui semble être la plus performante.

Il faut noter que l'identification par séquences binaires pseudo-aléatoires et programmation non-linéaire fournit un modèle continu du système, mais que la discrétisation de ce modèle ne détériore pas la précision de l'identification. Par ailleurs, la méthode choisie présente l'avantage d'identifier séparémment le paramètre caractérisant le gain du procédé, paramètre qu'il est souvent possible d'atteindre par d'autres moyen pour effectuer d'utiles comparaisons.

.../...

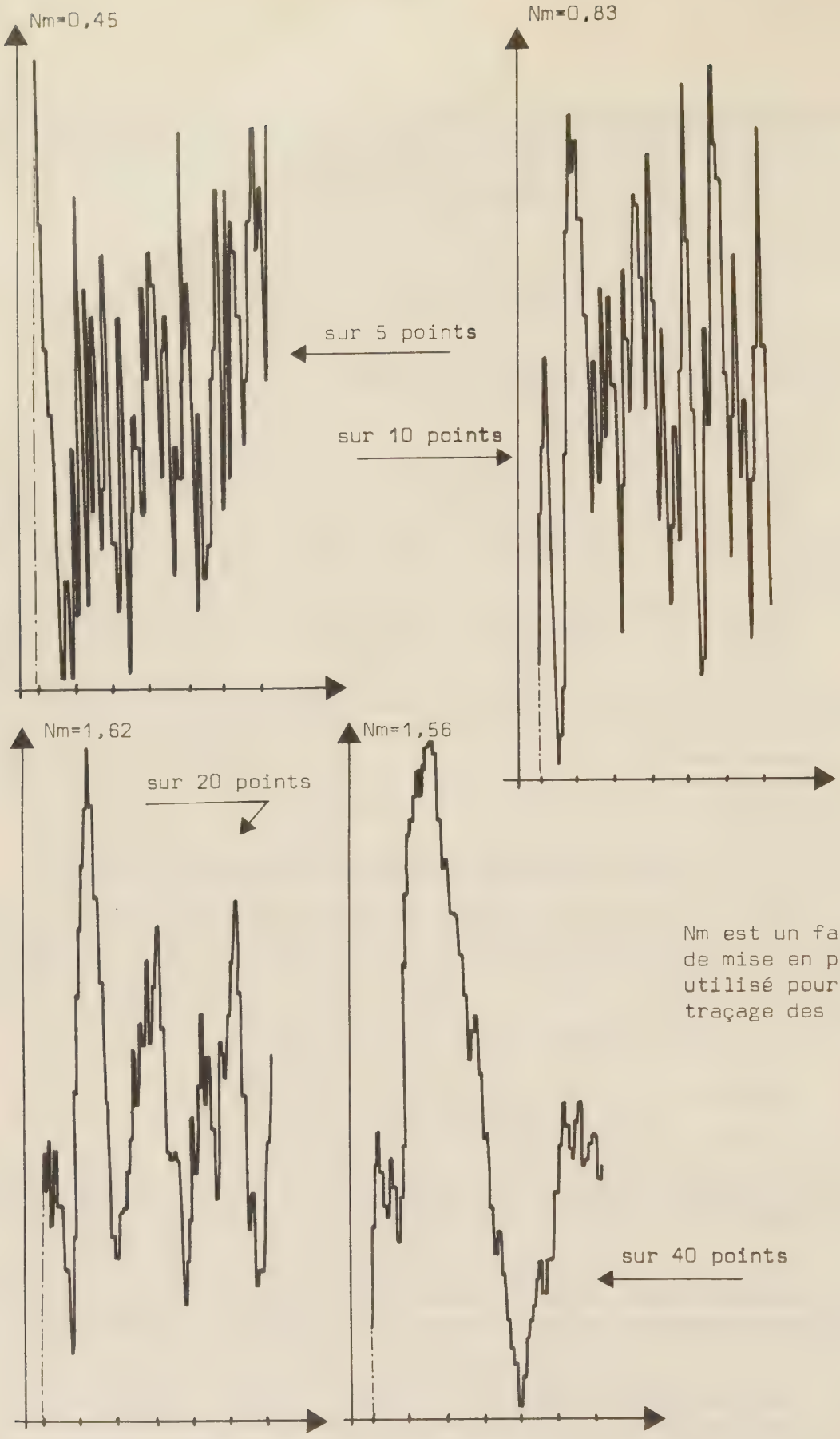


Figure 1.1.9(A) - CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION

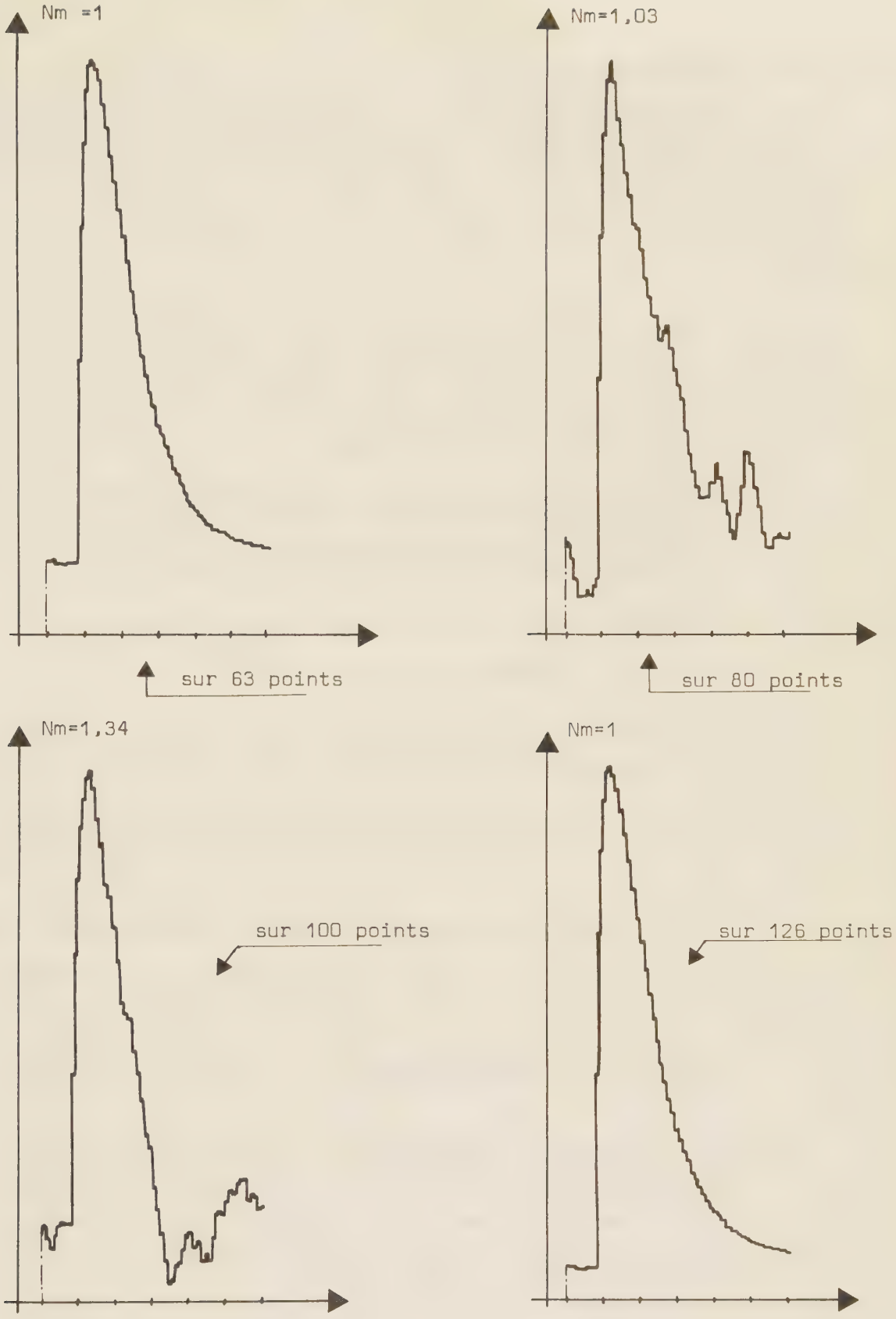


Figure 1.1.9(B) - CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION

1.2. MODELES RECHERCHES

Les premières études de modèles concernant les machines à papier avaient le but sans doute trop ambitieux de prendre en compte un très grand nombre de variables caractérisant le fonctionnement du processus. Devant la difficulté d'une telle entreprise, les recherches se sont ensuite davantage orientées vers la détermination de modèles partiels relativement simples, destinés à être utilisés pour l'élaboration des commandes des sous-systèmes correspondants. [11], [12]

Nous avons pour notre part tenté de représenter l'évolution dynamique de deux phénomènes multidimensionnels dont la maîtrise est essentielle pour la qualité du papier fabriqué. La première étude a porté sur le grammage et l'humidité du papier, c'est à dire encore son poids au mètre carré et sa teneur en eau relative. La caractérisation du processus de coloration du papier a constitué le second thème de cette recherche de modèles.

1.2.1. Modèle relatif au grammage et à l'humidité du papier

Le modèle ayant pour sorties le grammage et l'humidité du papier fabriqué comporte physiquement quatre entrées principales :

- le débit d'alimentation en pâte
- le débit d'alimentation en eau blanche
- la pression de vapeur en pré-sècherie
- la pression de vapeur en post-sècherie

De plus, il est également possible de considérer une sortie intermédiaire supplémentaire qui est la concentration du mélange en caisse de tête.

1.2.1.1. Représentation du grammage en fonction du débit de pâte

Le poids du papier par unité de surface est lié à la quantité de fibres et à la quantité d'eau envoyées en tête de machine.

Les deux grandeurs d'action principales relatives au grammage sont donc le débit d'alimentation en pâte et le débit d'alimentation en eau blanche.

En fait, pour des raisons de bon fonctionnement hydraulique (niveau dans les cuviers, etc....), nous avons choisi pour la machine à papier expérimentale du Centre Technique de fonctionner à débit total constant pour une fabrication donnée. C'est à dire que toute action sur le débit de pâte est accompagnée d'une action sur le débit d'eau blanche de même valeur absolue, mais de signe opposé.

Le schéma simplifié représentant le grammage en fonction des débits d'alimentation a donc finalement une seule entrée, que nous prendrons égale à la variation du débit de pâte par rapport au point de fonctionnement statique, comme l'indique la figure 1.2.1.

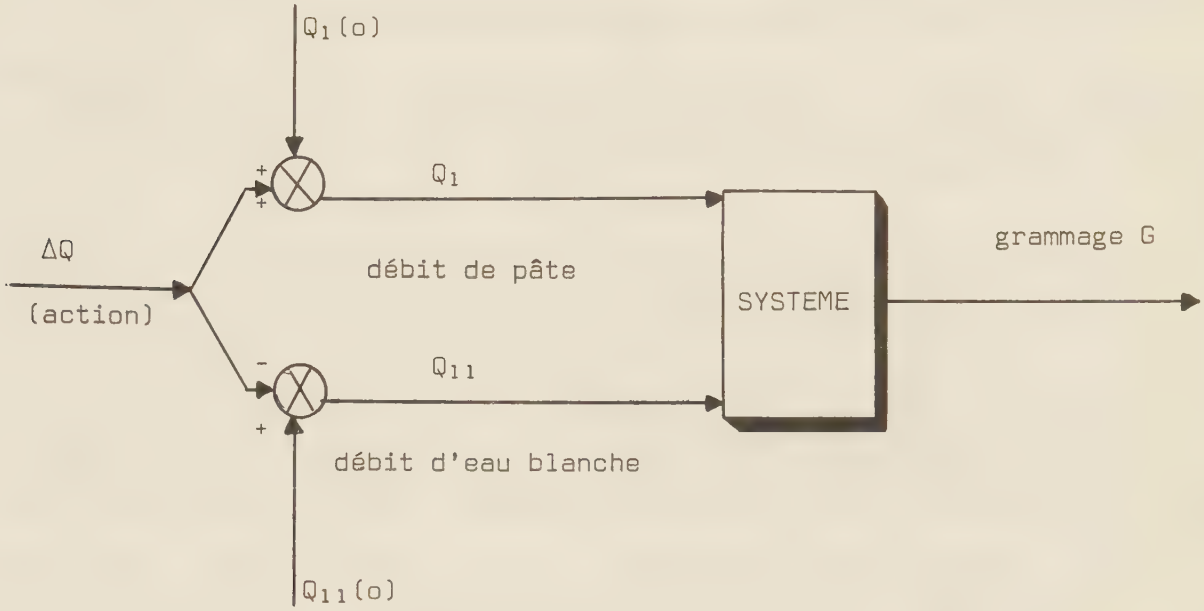


Figure 1.2.1. - REPRESENTATION DU GRAMMAGE

Le modèle dynamique décrivant le comportement du système autour de son point de fonctionnement présente par conséquent la forme schématisée par la figure 1.2.2.

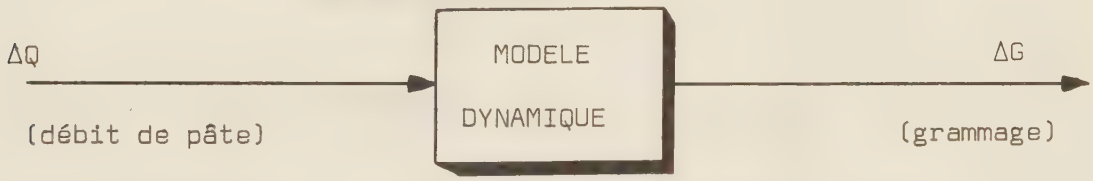


Figure 1.2.2. - FORME DU MODELE DYNAMIQUE DE GRAMMAGE

Il faut remarquer que le modèle dynamique liant le grammage au débit de pâte fait principalement intervenir des phénomènes de mélange en cuviers et de transport de matière, et peut donc être approché de manière assez simple à partir de la connaissance de certains paramètres de fonctionnement du système.

.../...

Il est par ailleurs important de souligner qu'une étude antérieure très complète [11] a montré qu'il est possible, du point de vue dynamique, de négliger l'influence du circuit de recyclage des eaux blanches.

1.2.1.2. Représentation de la sècherie

Le séchage du papier fait intervenir des phénomènes thermiques, multiples et très complexes. Contrairement au système précédent, il n'est par conséquent pas possible d'en établir un modèle de connaissance simple.

La sècherie d'une machine à papier est généralement divisée en deux parties principales.: la pré-sècherie et la post-sècherie, chacune de ces deux partie présentant des subdivisions internes en "batteries de cylindres sécheurs". Les pressions de vapeur dans les différentes batteries sont réglées de manière à réaliser un "profil de température" convenable lors du passage de la feuille en sècherie. Pour modifier la valeur de l'humidité du papier fabriqué, l'action s'effectue donc généralement sur la pression globale en pré-sècherie ou sur la pression globale en post-sècherie, ou sur l'ensemble de ces deux grandeurs.

Dans le cas de la machine à papier expérimentale du Centre Technique, nous avons choisi de maintenir la pression de vapeur en pré-sècherie constante pour une fabrication donnée, et de ne conserver pour grandeur d'action dynamique sur l'humidité que la pression de vapeur en post-sècherie. La figure 1.2.3. illustre le schéma élémentaire du modèle dynamique liant l'humidité du papier à la pression de vapeur.

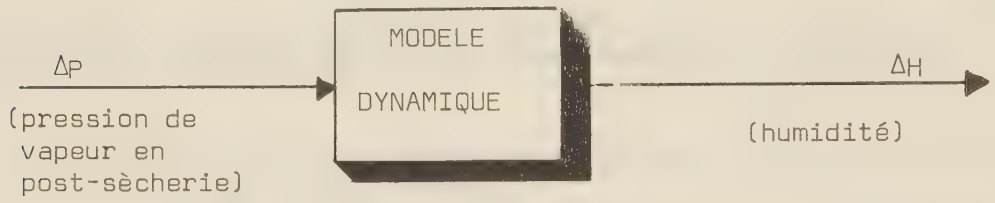


Figure 1.2.3. - FORME DU MODELE DYNAMIQUE D'HUMIDITE

Quelle que soit la solution adoptée, elle se ramène finalement toujours à considérer un modèle dynamique de la sècherie ne comportant qu'une seule variable d'action. Le but de l'identification doit être évidemment de caractériser la liaison existant entre cette variable d'action choisie pour la commande du système et la grandeur de sortie, c'est à dire l'humidité du papier fabriqué.

.../...

1.2.1.3. *Intéractions entre les modèles dynamiques de grammage et d'humidité*

Nous avons jusqu'à présent considéré séparément les deux modèles dynamiques de grammage et d'humidité représentant chacune de ces caractéristiques du papier en fonction de sa grandeur d'action principale. En réalité, les deux phénomènes ne sont pas indépendants, et il est donc indispensable de prendre en compte également leurs intéractions.

D'une part, le poids du papier par unité de surface dépend de la quantité d'eau qu'il contient, c'est à dire par conséquent du fonctionnement de la sècherie. Il existe donc une liaison entre la pression de vapeur en post-sècherie et le grammage total du papier.

D'autre part, toutes les actions sur la sècherie étant constantes, la variation de la quantité de fibres introduites en tête de machine modifie les conditions de séchage. Le débit de pâte a donc aussi une influence sur l'humidité de la feuille de papier.

Finalement, le modèle global représentant le comportement dynamique du grammage et de l'humidité de la feuille de papier se présente comme un système multidimensionnel à deux entrées et deux sorties comportant quatre blocs de couplages, comme l'indique la figure 1.2.4.

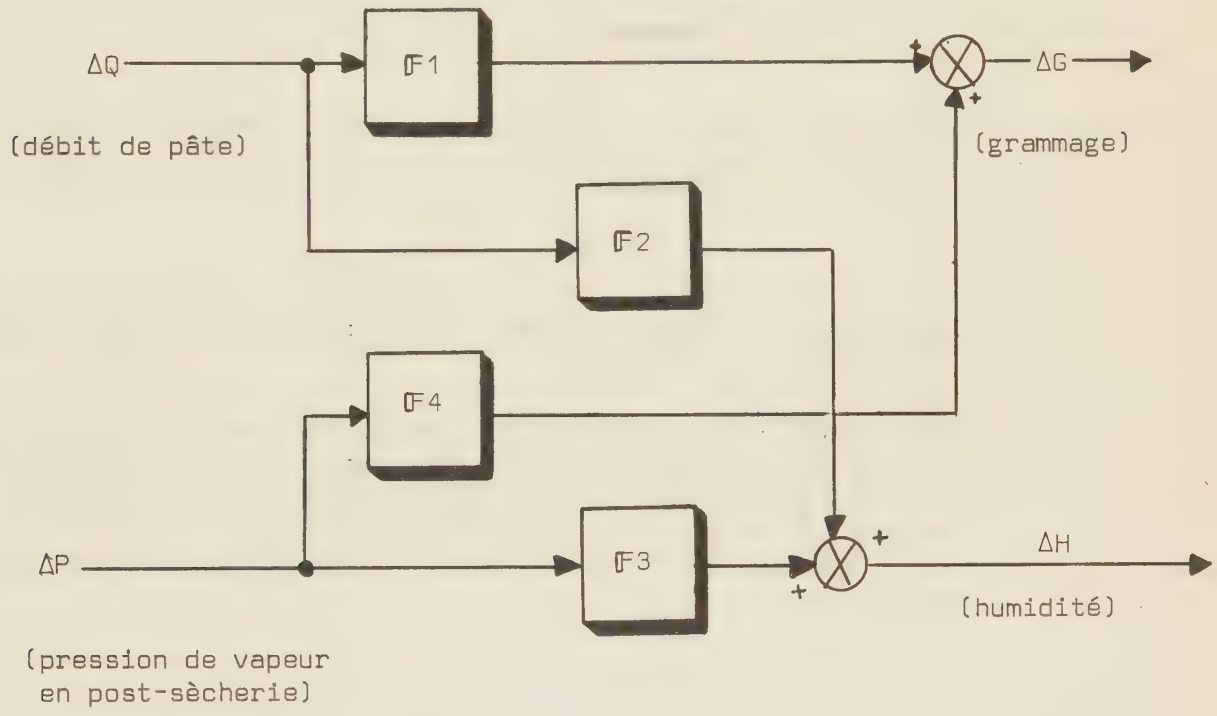


Figure 1.2.4. - MODELE DYNAMIQUE GLOBAL

.../...

Il est possible de simplifier ce schéma global en considérant comme grandeur de sortie non plus le grammage total de la feuille de papier, mais son grammage "sec". Le grammage sec caractérise le poids par unité de surface de la feuille supposée débarassée de l'eau qu'elle contient. Dans ces conditions, le grammage sec ne dépend plus que du débit d'alimentation en pâte et devient indépendant du fonctionnement de la sècherie. Pour l'unité pilote du Centre Technique du Papier, la valeur du grammage sec est fournie par le calculateur industriel à partir des mesures du grammage total et de l'humidité.

Dans tout le reste de l'étude, nous considèrerons toujours désormais comme grandeur de sortie le grammage sec de la feuille de papier. La figure 1.2.5. illustre la forme du modèle dynamique ainsi simplifié.

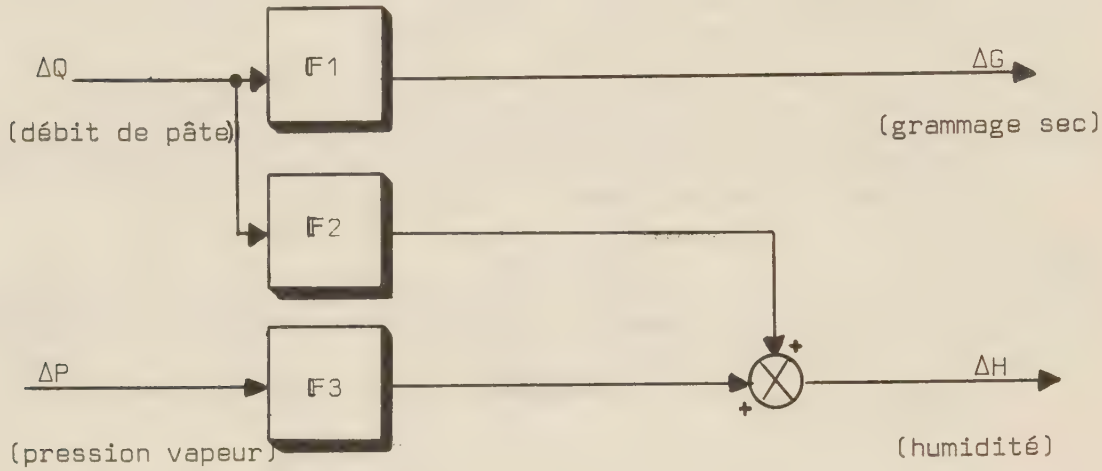


Figure 1.2.5. - MODELE DYNAMIQUE DU GRAMMAGE SEC ET DE L'HUMIDITE

Il convient de préciser que la forme de ce modèle suppose implicitement une régulation locale de la pression de vapeur, rapide par rapport à la dynamique générale du système. S'il n'en était pas ainsi, il existerait en effet une influence du débit de pâte sur la pression de vapeur [11]. Pratiquement, la condition précédente est très généralement satisfaite.

.../...

1.2.2. Modèle relatif à la couleur du papier

Science assez complexe, la colorimétrie trouve son origine dans l'étude de l'anatomie et de la physiologie de l'oeil humain. L'oeil étant un système trivariant, une couleur peut se définir pratiquement à l'aide de trois nombres. Ces trois grandeurs, appelées "coordonnées trichromatiques", sont calculées à partir des réflectances du papier considéré mesurées à travers trois filtres (ambre, vert et bleu) selon une procédure définie par la Commission Internationale de l'Eclairage [12].

1.2.2.1. Matrice des gains

Un colorimètre en continu fournit en permanence trois signaux proportionnels aux écarts existant entre les coordonnées trichromatiques du papier considéré et les coordonnées trichromatiques correspondantes d'un papier pris comme référence. Nous noterons ΔX, ΔY et ΔZ les valeurs de ces trois écarts qui, en dynamique, caractérisent donc la couleur de la feuille de papier fabriquée.

Pour réaliser un papier possédant la teinte désirée, il est généralement nécessaire d'utiliser trois colorants convenablement choisis. Il faut toutefois remarquer qu'il n'est pas possible avec les trois mêmes colorants de reproduire toutes les teintes, et en particulier les teintes très lumineuses puisque le mélange est soustractif du point de vue spectral.

Comme l'indique le schéma général de la figure III les trois colorants sont ajoutés à la pâte à papier à la sortie du cuvier de tête de la machine à papier expérimentale.

Il est en effet nécessaire d'assurer une certaine durée de contact entre les fibres de cellulose et les colorants avant de réaliser la précipitation de la colle sur ces fibres grâce au sulfate d'alumine.

Autour du point de fonctionnement choisi, les écarts de couleur ΔX, ΔY et ΔZ sont liés en régime permanent aux variations ΔC_1, ΔC_2 et ΔC_3 des trois concentrations C_1 , C_2 et C_3de colorants par une matrice carrée $[\Omega]$ de neuf éléments. Cette matrice $[\Omega]$ est souvent appelée, par abus de langage, "matrice des gains statiques".

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = [\Omega] \cdot \begin{bmatrix} \Delta C_1 \\ \Delta C_2 \\ \Delta C_3 \end{bmatrix}$$

Pour un point de fonctionnement donné, certains fabricants de colorants fournissent, outre les valeurs à donner aux trois concentrations de colorants pour obtenir la teinte désirée, la matrice $[\Lambda]$, égale à l'inverse de la matrice $[\Omega]$ et telle que :

$$\begin{bmatrix} \Delta C_1 \\ \Delta C_2 \\ \Delta C_3 \end{bmatrix} = [\Lambda] \cdot \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

.../...

Cette matrice [Λ] permettrait donc théoriquement, en présence d'erreurs statiques sur les coordonnées trichromatiques, d'effectuer les corrections nécessaires sur les concentrations de colorants pour amener le papier à la teinte souhaitée.

1.2.2.2. Représentation dynamique de la coloration du papier

Le procédé de coloration du papier fait intervenir essentiellement, du point de vue physique, des phénomènes de mélanges et de transports. Si les trois colorants sont injectés dans les circuits de tête de la machine en un même point, il est donc assez réaliste de prévoir entre les trois entrées et les trois sorties du système des comportements dynamiques très comparables. Cette hypothèse a bien été vérifiée lors des différents essais d'identification réalisés pour ce système.

Le modèle multidimensionnel dynamique à trois entrées et trois sorties représentant la coloration du papier peut ainsi être représenté par le schéma de la figure 1.2.6., où $\mathbb{F}$ symbolise la relation dynamique commune à tous les couplages.

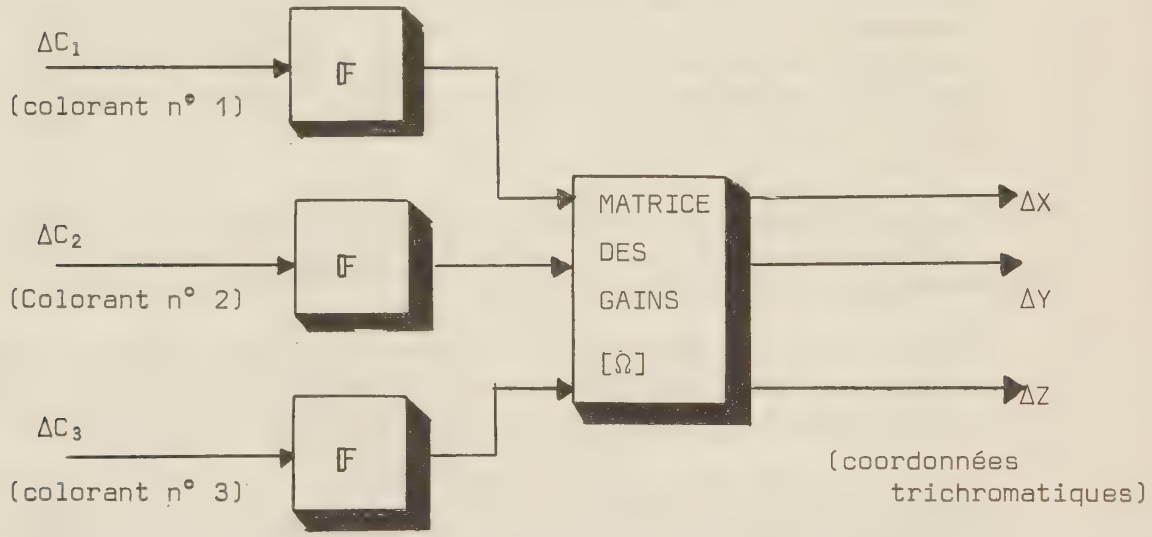


Figure 1.2.6. - MODELE DYNAMIQUE DE LA COULEUR

Il est enfin très important de remarquer que le phénomène de coloration de la feuille de papier ne peut être représenté par un tel modèle que dans la mesure où d'autres paramètres caractéristiques du fonctionnement de la machine à papier sont maintenus entre certaines limites de variations. C'est le cas en particulier pour le pH de la solution et l'humidité de la feuille.

.../...

1.3. DETERMINATION D'UN MODELE DYNAMIQUE RELATIF AU GRAMMAGE ET A L'HUMIDITE

Le recherche d'un modèle dynamique représentant le grammage et l'humidité de la feuille de papier a fait l'objet de nombreux essais d'identification sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier. Nous ne présenterons pas ici une fastidieuse compilation de tous les résultats obtenus pour différents points de fonctionnement. Les valeurs que nous avons finalement adoptées sont d'ailleurs en général des valeurs moyennes, la complexité et les nombreuses non-linéarités du processus étudié rendant souvent difficile la réalisation d'essais parfaitement reproductibles (variation de la qualité de la pâte, influence des conditions atmosphériques sur le fonctionnement de la sècherie, etc...)

1.3.1. Fonction de transfert liant le grammage sec au débit de pâte

Cette fonction de transfert tend à représenter des phénomènes de mélanges (mélange en cuve de dilution et en caisse de tête) et de transports de matière (passage dans les conduites en tête de machine, transports sur la toile et en sècherie). Il est donc relativement aisé d'en établir un modèle de connaissance à partir de différents paramètres de fonctionnement (débits, volumes des cuviers, concentrations, vitesse de machine, longueur de la feuille, etc...). Ce modèle de connaissance, simplifié, a d'ailleurs été utilisé pour l'élaboration des premières régulations de grammage réalisées au Centre Technique du Papier [11].

1.3.1.1. Conditions d'expérimentation

Le modèle de connaissance ayant déjà conduit à des résultats satisfaisants pour une régulation monodimensionnelle du grammage sec, les essais d'identification correspondants ont été effectués en nombre relativement restreint.

Le principal point de fonctionnement étudié est caractérisé par les paramètres moyens suivants :

- grammage sec : entre 70 et 78 g/m^2
- humidité : entre 5 et 6 %
- débit de pâte : entre 4,5 et 6 m^3/h
- débit d'eau blanche : de l'ordre de 27 m^3/h
- Pression de vapeur en pré-sècherie : entre 0,10 et 0,25 bar
- Pression de vapeur en post-sècherie : entre 0,4 et 1 bar
- Vitesse générale : 60 m/mn

.../...

Les connaissances acquises précédemment sur le système indiquent un temps de réponse de l'ordre de 6 minutes comprenant un retard pur un peu supérieur à 1 minute. Nous avons donc choisi pour la séquence binaire pseudo-aléatoire une période élémentaire Δt comprise entre 3 et 5 secondes, avec un registre à décalage de 7 positions correspondant à une longueur maximale L égale à 127.

Le signal binaire correspond, selon les essais, à une amplitude réelle allant de 0,32 m^3/h à 0,6 m^3/h.

Le calcul de la fonction d'intercorrélation est effectué sur la longueur d'une séquence, après l'envoi d'une première séquence destinée à assurer la mise en régime permanent du système.

1.3.1.2. Fonction de transfert retenue

Les meilleurs résultats fournis par l'identification paramétrique des réponses impulsionnelles ainsi obtenues correspondent à un modèle comportant un gain, un retard pur et deux constantes de temps [6]. Ce résultat est assez bien justifié par la connaissance physique du système.

Cependant, les essais de régulation de grammage sec antérieurs à la mise en oeuvre de ces méthodes d'identification ont montré qu'il est possible de simplifier un peu ce modèle sans détériorer les performances de la commande associée. La simplification adoptée consiste à ne conserver qu'une seule constante de temps "équivalente". Nous avons donc recherché également par programmation non-linéaire un modèle du premier ordre avec retard pur.

$$F_1(p) = K_1 \cdot \frac{e^{-\tau_1 \cdot p}}{1+T_1 \cdot p}$$

La figure 1.3.1. illustre un exemple d'approximation conduisant à des paramètres très voisins des valeurs moyennes finalement retenues. En fait, pour tous les essais effectués, nous avons toujours constaté que la relation existant entre le débit de pâte et le grammage peut être approximée très valablement par une fonction de transfert de ce type.

Pour le point de fonctionnement choisi en exemple, la fonction de transfert $F_1(p)$ adoptée a pour expression :

$$F_1(p) \simeq 15 \cdot \frac{e^{-75.p}}{1+60.P}$$

où le gain est en g/m^2 par m^3/h.

.../...

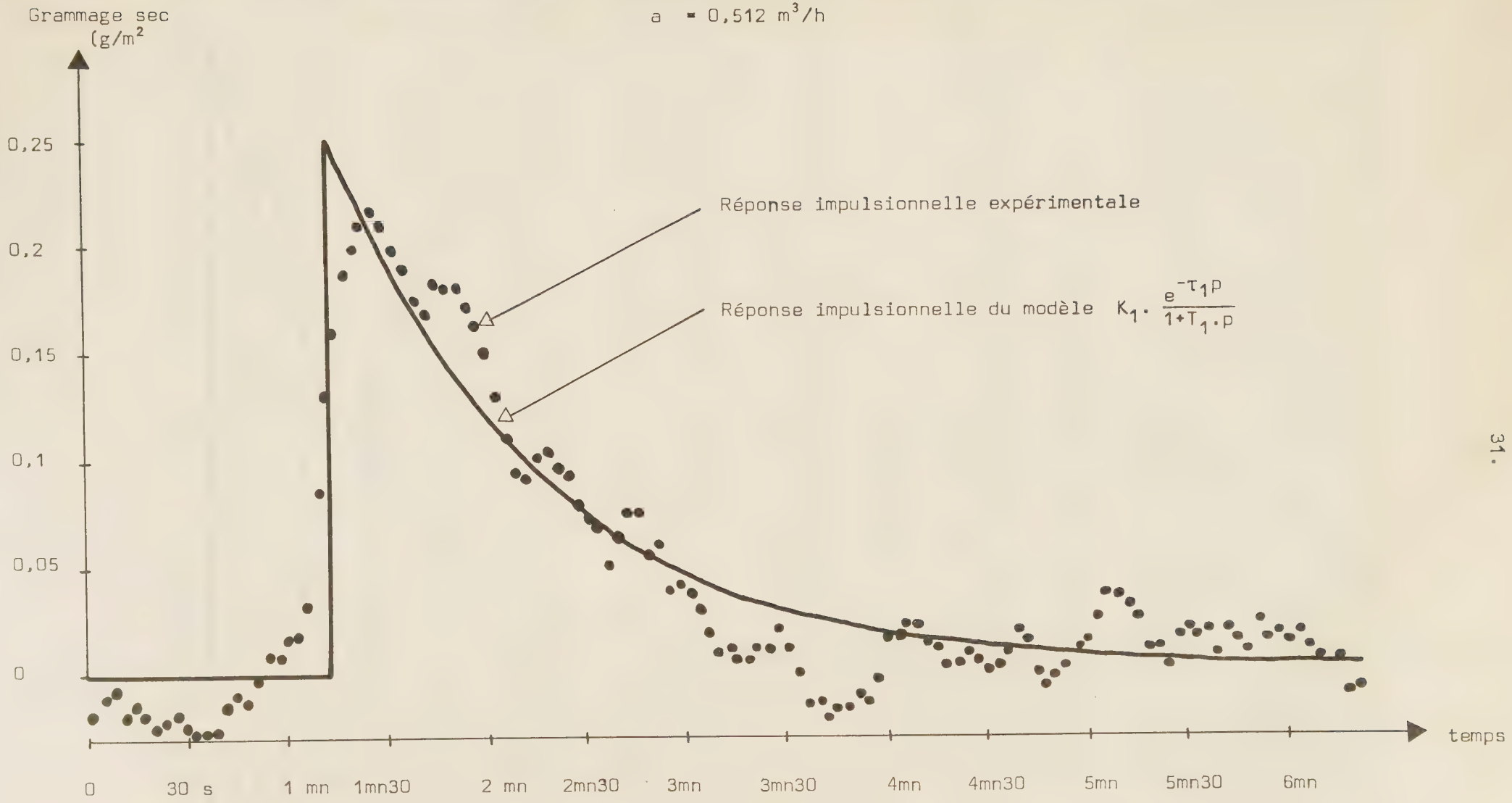


Figure 1.3.1. - REPONSE IMPULSIONNELLE OBTENUE PAR INTERCORRELATION ENTRE DEBIT DE PATE ET GRAMMAGE

Il convient de remarquer que le choix d'une valeur moyenne du gain résumant bien tous les résultats significatifs obtenus par la méthode d'identification utilisée tient compte également des valeurs relevées à partir d'un certain nombre d'essais en échelons effectués au voisinage du régime permanent considéré. Il faut enfin noter que le modèle proposé englobe le comportement dynamique (en l'occurence pratiquement négligeable) de l'asservissement local de débit de pâte assuré par le calculateur numérique. Cette remarque est d'ailleurs valable pour tous les essais d'identification présentés dans ce chapitre, puisque toutes les grandeurs d'action susceptibles d'intervenir dans les différentes régulations sont munies d'asservissements locaux numériques. L'envoi des séquences binaires pseudo-aléatoires se fait donc sur la consigne de l'asservissement considéré.

1.3.2. Fonction de transfert liant l'humidité au débit de pâte

Contrairement au cas du grammage sec, il apparaît difficile d'établir un modèle de connaissance reliant l'humidité de la feuille de papier en fin de machine au débit d'alimentation en pâte. L'utilisation des méthodes d'identification dynamique semble donc indispensable pour l'élaboration d'un modèle représentant ce système.

1.3.2.1. Conditions d'expérimentation

Il est cependant possible d'avoir une idée relativement juste du comportement dynamique du système en considérant que le phénomène principal entrainant une variation d'humidité lors d'une modification du débit de pâte résulte de la variation concomitante du grammage.

Cette hypothèse, confirmée par des essais préliminaires sous forme d'échelons, permet de choisir les différents paramètres de la séquence binaire pseudo-aléatoire. Comme pour l'identification du grammage sec, nous avons donc adopté une période élémentaire Δt valant de 3 à 5 secondes et un registre à décalage de 7 positions correspondant à une longueur maximale L de 127.

L'amplitude réelle du signal binaire appliqué sur la consigne de l'asservissement local du débit de pâte se situe, pour les différents essais, entre $\pm$ 0,32 m^3/h et $\pm$ 0,6 m^3/h, et le calcul de la fonction d'intercorrélation est toujours effectué sur la seconde séquence envoyée.

Le principal point de fonctionnement considéré est le même que celui qui est mentionné au § 1.3.1.1. pour l'identification du grammage.

1.3.2.2. Fonction de transfert retenue

Les résultats que nous avons obtenus confirment bien l'hypothèse faite précédemment, à savoir que lors d'une variation du débit de pâte, les comportements dynamiques de l'humidité et du grammage sec sont très comparables. C'est ainsi que les meilleurs approximations paramétriques reliant l'humidité au débit de pâte sont réalisées avec un modèle du second ordre comportant un retard pur. Les valeurs des constantes de temps et du retard pur sont voisines des paramètres correspondants du modèle du grammage [6].

.../...

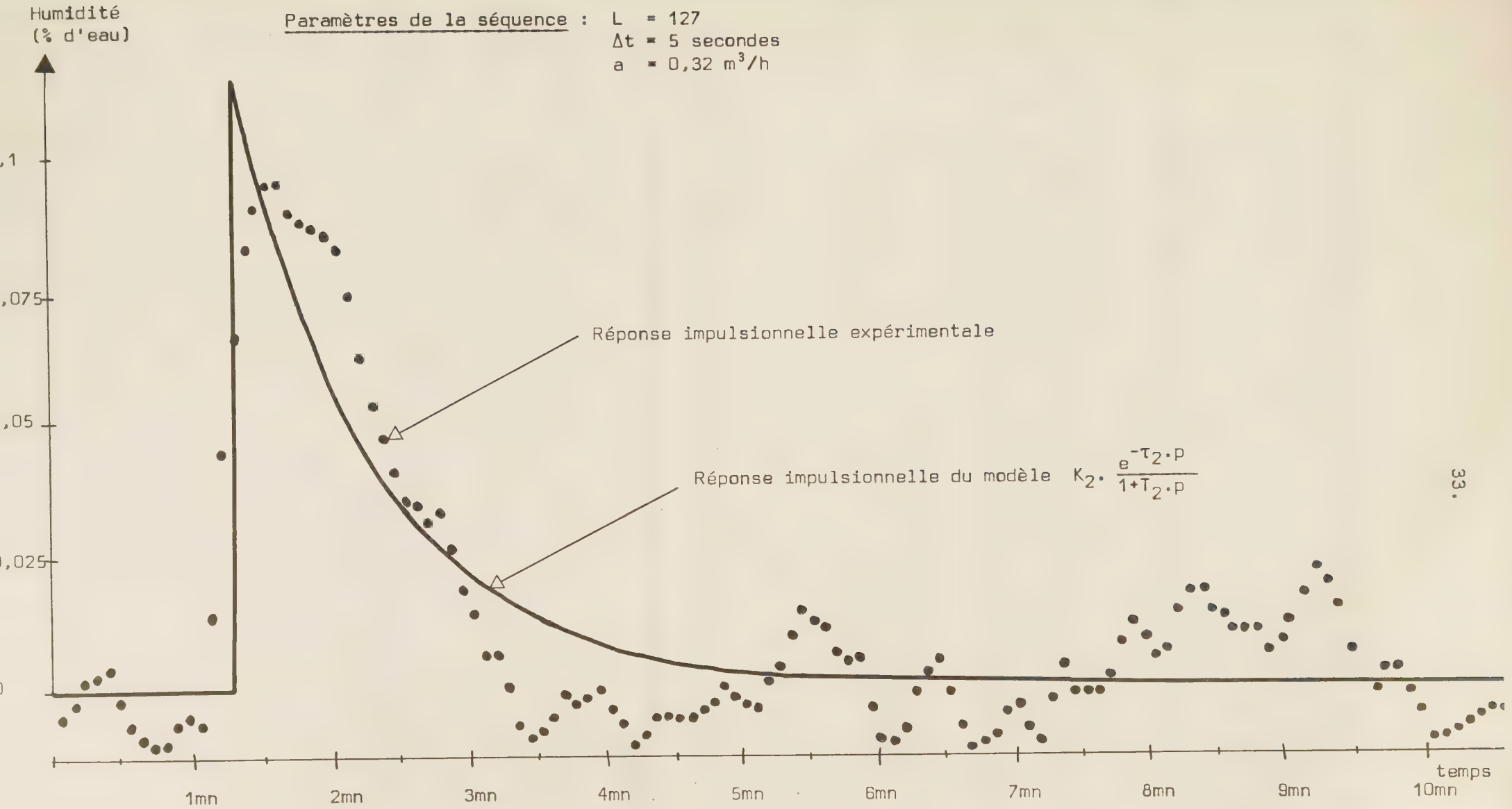


Figure 1.3.2. - REPONSE IMPULSIONNELLE OBTENUE PAR INTERCORRELATION ENTRE DEBIT DE PATE ET HUMIDITE

De la même façon que précédemment, nous avons donc essayé de représenter le système par un modèle du 1er ordre avec retard pur.

$$F_2(p) = K_2 \cdot \frac{e^{-\tau_2 \cdot p}}{1+T_2 \cdot p}$$

Il apparaît que là encore l'approximation par une telle fonction de transfert semble raisonnable d'après l'allure des réponses impulsionnelles obtenues par calcul d'intercorrélation.

La figure 1.3.2. se rapporte à un exemple très proche des résultats de synthèse finalement retenus. Les paramètres d'un tel modèle (le gain excepté, évidemment) sont en fait très voisins de leurs homologues intervenant dans le modèle du grammage sec. Les valeurs identiques déterminées pour les retards purs correspondent bien en particulier à une réalité physique liée à la vitesse de la machine et à la longueur dela feuille.

Pour le point de fonctionnement choisi en exemple, la fonction de transfert $F_2(p)$ retenue a pour expression :

$$F_2(p) \simeq 7 \cdot \frac{e^{-75.p}}{1+60.p}$$

où le gain est en % d'eau par m^3/h.

La valeur du gain au voisinage du point de fonctionnement considéré tient compte également des résultats obtenus lors d'essais en échelons.

1.3.3. Fonction de transfert liant l'humidité à la pression de vapeur en post-sècherie

La recherche de cette fonction de transfert à pour objet de décrire le fonctionnement de la sècherie. La complexité des problèmes thermiques relatifs à ce fonctionnement interdit pratiquement la constitution d'un modèle de connaissance. L'utilisation de la vapeur pour sécher le papier se traduit en effet principalement par un double phénomène de transfert de chaleur très difficile à formuler mathématiquement : transfert de chaleur entre la vapeur et les cylindres tout d'abord, puis entre les cylindres et la feuille de papier. L'emploi de méthodes d'identification ne nécessitant qu'un minimum de connaissances "a priori" du système est bien dans ce cas le seul recours possible pour obtenir une représentation de son comportement dynamique.

.../...

1.3.3.1. Conditions d'expérimentation

Des recherches préliminaires constituées par des variations en échelons de la pression de vapeur en post-sècherie font apparaître un temps de réponse de l'ordre de 6 à 8 minutes, sans retard pur appréciable.

Différents essais ont donc été réalisés avec des entrées binaires pseudo-aléatoires de périodes élémentaires Δt comprises entre 3 et 7 secondes, avec un registre à décalage de 7 positions fournissant une séquence de longueur maximale L égale à 127.

Le système apparaissant le plus souvent très perturbé, l'amplitude du signal binaire est relativement importante, et vaut $\pm$ 0,2 à $\pm$ 0,3 bar. Mais il convient de rappeler que l'action se fait uniquement sur la post-sècherie, les paramètres de la pré-sècherie n'étant pas modifiés.

La fonction d'intercorrélation est toujours calculée pendant l'envoi de la seconde séquence, la première étant destinée à la mise en régime permanent du système.

Les essais effectués sont relatifs aux mêmes domaines de fonctionnement déjà choisis pour l'étude des deux précédentes fonctions de transfert. Nous rappelons en particulier les paramètres moyens du principal régime permanent considéré (Cf. § 1.3.1.1.)

- Grammage sec : entre 70 et 78 g/m^2
- humidité : entre 5 et 6 %
- Débit de pâte : entre 4,5 et 6 m^3/h
- Débit d'eau blanche : de l'ordre de 27 m^3/h
- Pression de vapeur en pré-sècherie : entre 0,10 et 0,25 bar
- Pression de vapeur en post-sècherie : entre 0,4 et 1 bar
- Vitesse générale : 60 m/mn

1.3.3.2. Fonction de transfert retenue

L'identification paramétrique des réponses impulsionnelles obtenues par ces essais conduit à un modèle du second ordre, avec constante de temps double. Sur la totalité des essais effectués sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier, le retard pur a été le plus généralement trouvé nul ou, dans les quelques cas contraires, d'une valeur négligeable par rapport à la dynamique totale du système.

.../...

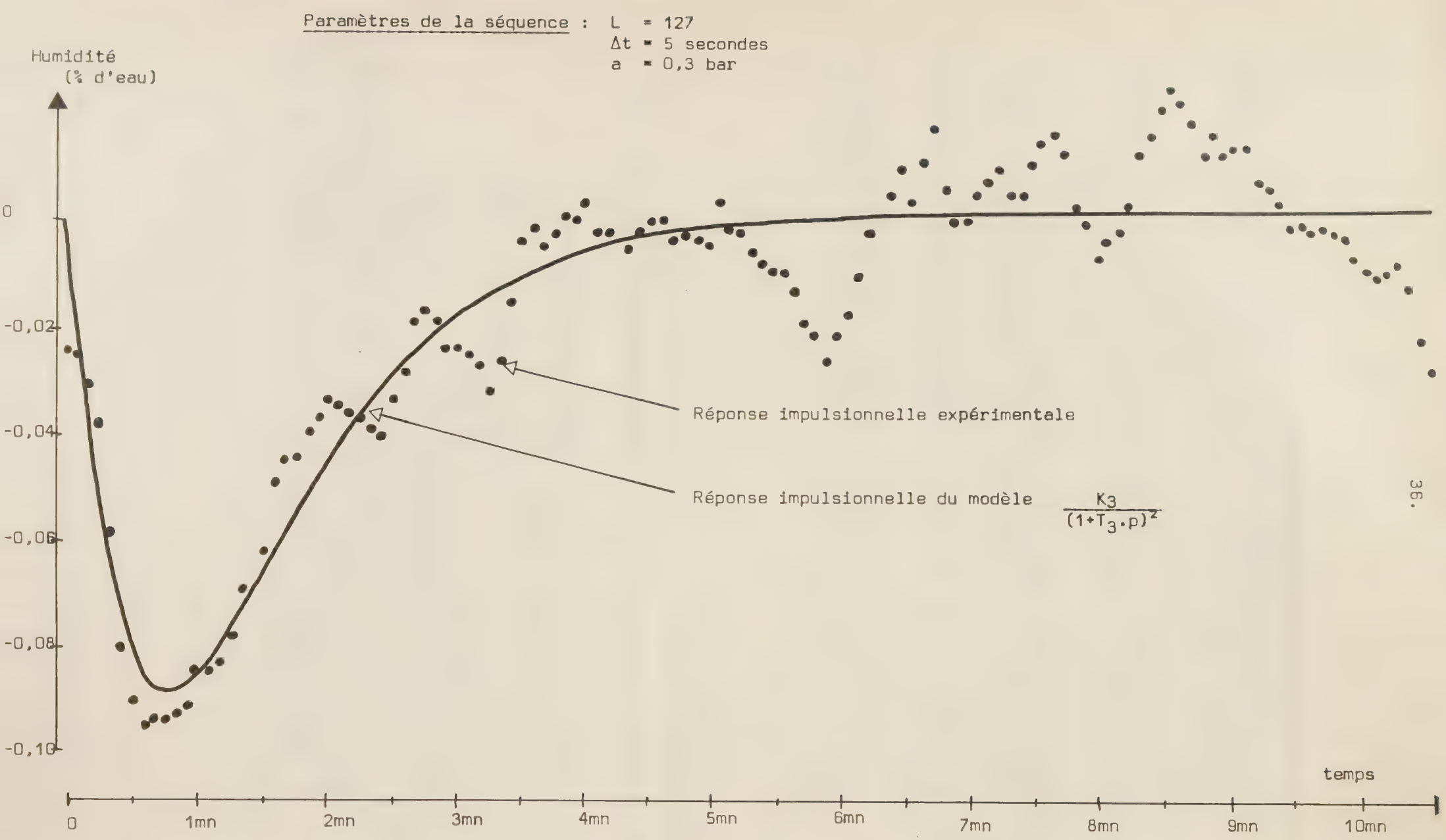


Figure 1.3.3. - REPONSE IMPULSIONNELLE OBTENUE PAR INTERCORRELATION ENTRE PRESSION DE VAPEUR ET HUMIDITE

Comme pour les deux autres cas précédemment étudiés, nous avons également essayé de représenter le système par un modèle du premier ordre. Mais, dans le cas présent, une telle approximation semble beaucoup trop hasardeuse et ne permet pas de caractériser correctement les réponses impulsionnelles résultantdes calculs d'intercorrélations.

Il apparaît donc nécessaire de conserver pour la fonction de transfert liant l'humidité à la pression de vapeur en post-sècherie une expression de la forme :

$$F_3(p) = \frac{K_3}{(1+T_3.p)^2}$$

La figure 1.3.3. présente un exemple d'identification du système considéré correspondant assez bien aux résultats moyens retenus. L'expression finalement adoptée pour la fonction de transfert $F_3(p)$ au voisinage du point de fonctionnement mentionné en exemple est la suivante :

$$F_3(p) = \frac{-9,3}{(1+40.p)^2}$$

où le gain est en % d'eau par bar.

Il convient de remarquer que le gain K_3 est toujours négatif. Une augmentation de la pression de vapeur entraîne en effet un accroissement de la quantité d'eau extraite de la feuille lors de son passage dans la sècherie, et donc une diminution de l'humidité du papier en fin de machine. Les essais préliminaires en échelons ont également été utilisés pour l'adoption d'une valeur moyenne de ce gain autour du régime permanent considéré.

.../...

1.3.4. Etablissement d'un modèle dynamique en variables d'état

La représentation d'un système sous forme de variables d'état est largement utilisée dans tous les développements récents de l'automatique, et en particulier dans la théorie de la commande optimale. Etant donné que l'utilisation prévue pour ce modèle est la mise en oeuvre d'une commande par calculateur, nous recherchons donc une représentation d'état discrète.

Il existe différentes méthodes permettant de passer d'un ensemble de fonctions de transfert à un modèle de variables d'état. Mais le cas envisagé ici est suffisamment simple pour conduire à un tel modèle en utilisant seulement l'étape intermédiaire de la discrétisation des fonctions de transfert continues. L'étude de l'observabilité et de la commandabilité de la représentation en variables d'état ainsi obtenue permet de tester sa minimalité.

1.3.4.1. Elaboration d'un modèle général

Nous considèrerons tout d'abord le cas plus général où les comportements dynamiques du grammage et de l'humidité vis à vis du débit de pâte ne sont pas identiques, exception faite du retard pur.

Nous emploierons les notations suivantes :

ΔT : période d'échantillonnage du système

T_i : constante de temps

$a_i = e^{-\Delta T/T_i}$

τ_j : retard pur

$n_j = \frac{\tau_j}{\Delta T}$ (nombre entier)

et nous supposerons que toutes les actions sur le système s'effectuent par l'intermédiaire de bloqueurs d'ordre zéro (ce qui est bien pratiquement le cas des stations de transfert utilisées).

Dans ces conditions, la fonction de transfert discrète $F_1^*(z)$ entre le débit de pâte et le grammage sec s'écrit :

$$F_1^*(z) = K_1 \cdot \frac{(1-a_1) \cdot z^{-(n_1+1)}}{1-a_1 \cdot z^{-1}}$$

.../...

La fonction de transfert discrète reliant l'humidité au débit de pâte est de la forme :

$$F_2^*(z) = K_2 \cdot \frac{(1-a_2) \cdot z^{-(n_2+1)}}{1-a_2 \cdot z^{-1}}$$

En supposant que le retard pur à la même valeur que pour le grammage, cette expression devient :

$$F_2^*(z) = K_2 \cdot \frac{(1-a_2) \cdot z^{-(n_1+1)}}{1-a_2 \, z^{-1}}$$

Enfin, la fonction de transfert discrète reliant l'humidité à la pression de vapeur en post-sècherie s'exprime sous la forme :

$$F_3^*(z) = K_3 \frac{\alpha_3 z^{-1} + \beta_3 z^{-2}}{(1-a_3 z^{-1})^2}$$

avec :
$$\begin{cases} \alpha_3 = 1 - a_3 - \dfrac{\Delta T}{T_3} \cdot a_3 \\ \beta_3 = a_3^2 - a_3 + \dfrac{\Delta T}{T_3} \cdot a_3 \end{cases}$$

Nous avons adopté pour la régulation multidimensionnelle de grammage et d'humidité une période d'action ΔT de 15 secondes. Le temps mort τ_1 étant égal, dans l'exemple choisi, à 75 secondes, nous avons donc $n_1 = 5$

Par suite, pour ne pas consacrer plus de 5 variables d'état à l'expression de ce retard pur commun, nous pouvons adopter la représentation d'état discrète suivante :

$$\vec{x}(i+1) = [A] \cdot \vec{x}(i) + [B] \cdot \vec{u}(i)$$

$$\vec{y}(i) = [C] \cdot \vec{x}(i)$$

.../...

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-a_1) & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-a_2) & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3 & -a_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (1-a_3)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2 & K_3.\alpha & K_3.\beta \end{bmatrix}$$

où $\alpha = \frac{\alpha_3}{(1-a_3)^2}$ et $\beta = \frac{\beta_3}{(1-a_3)^2}$

La forme adoptée utilisant α et β au lieu de α_3 et β_3 permet d'avoir en régime stable, chaque variable d'état égale à la variable d'entrée dont elle dépend. Cette propriété simplifie notablement les problèmes de cadrage lors d'une utilisation éventuelle dans un calculateur numérique industriel ne possédant pas le calcul en virgule flottante.

.../...

Le vecteur d'entrée dynamique $\vec{u}$ possède deux éléments définis par :

$$\begin{cases} u_1 = \Delta Q \text{ (débit de pâte)} \\ u_2 = \Delta P \text{ (pression de vapeur en post-sècherie)} \end{cases}$$

Le vecteur de sortie dynamique $\vec{y}$ possède également deux éléments définis par :

$$\begin{cases} y_1 = \Delta G \text{ (grammage sec)} \\ y_2 = \Delta H \text{ (humidité)} \end{cases}$$

Pour étudier la minimalité de la représentation proposée, il suffit de déterminer le rang de la matrice de commandabilité $[\Gamma]$ et de la matrice d'observabilité $[\psi]$ telles que :

$$[\Gamma] = \left[B,\ A.B,\ A^2.B,\ \ldots\ldots,\ A^8.B\right]$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C.A^8 \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la représentation soit minimale est que chacune des deux matrices $[\Gamma]$ et $[\psi]$ soit de rang maximal, c'est à dire de rang égal à 9 pour le cas considéré.

Cette condition se vérifie aisément au prix d'un calcul un peu long mais sans aucune difficulté, en supposant évidemment $a_2 \neq a_1$.

1.3.4.2. Modèle en variable d'état adopté

Nous avons vu précédemment qu'il est en fait possible de considérer que les comportements dynamiques du grammage sec et de l'humidité vis à vis du débit d'alimentation en pâte sont sensiblement identiques, c'est à dire que $a_2 = a_1$. Cette hypothèse permet donc de supprimer une variable d'état.

Par ailleurs, il est intéressant d'exprimer une sortie intermédiaire qui est la concentration C en caisse de tête. Une étude antérieure [11] a montré que cette grandeur peut être considérée comme une image anticipée du grammage, le retard pur n'étant plus que de 15 secondes par rapport au débit de pâte. La fonction de transfert discrète liant la concentration ΔC au débit de pâte ΔQ est donc de la forme :

$$F_4^*(z) = K_4 \cdot \frac{(1-a_1)z^{-2}}{1-a_1.z^{-1}}$$

.../...

où le gain K_4 est exprimé en g/l par m^3/h.

Pour le point de fonctionnement cité en exemple, la valeur identifiée pour ce gain à 0,7 g/l par m^3/h.

La prise en compte de cette sortie supplémentaire $y_3 = \Delta C$ augmente de une unité la dimension du vecteur de sortie $\vec{y}$, et demande simplement un nouvel arrangement des variables d'état.

Le modèle finalement retenu comporte donc 8 variables d'état et se présente sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \\ x_3(i+1) \\ x_4(i+1) \\ x_5(i+1) \\ x_6(i+1) \\ x_7(i+1) \\ x_8(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3 & -a_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \\ x_4(i) \\ x_5(i) \\ x_6(i) \\ x_7(i) \\ x_8(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-a_1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (1-a_3)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(i) \\ u_2(i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \\ y_3(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2 & K_3.\alpha & K_3.\beta \\ 0 & K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \\ x_4(i) \\ x_5(i) \\ x_6(i) \\ x_7(i) \\ x_8(i) \end{bmatrix}$$

La vérification de la commandabilité et de l'observabilité de ce modèle s'effectue sans difficulté, et montre que la représentation est bien minimale.

Remarque :

Il nous semble utile de rappeler que l'hypothèse simplificatrice que nous avons faite (constantes de temps T_1 et T_2 égales) est basée principalement sur les enseignements tirés des essais expérimentaux réalisés sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier. Aucune justification physique rigoureuse ne semble permettre de considérer ce résultat comme général.

..../...

Dans le cas où cette simplification n'est pas acceptable, la prise en compte de la concentration en caisse de tête comme sortie intermédiaire apparaît de manière moins évidente, mais elle demeure cependant possible sans trop compliquer la représentation et, bien sûr, sans en détruire la minimalité.

.../...

1.4. DETERMINATION D'UN MODELE DYNAMIQUE RELATIF A LA COULEUR

L'élaboration d'un modèle dynamique représentant l'évolution de la couleur du papier au voisinage du point de fonctionnement choisi peut être en fait décomposé en deux parties. D'une part, l'utilisation des méthodes d'identification précédemment évoquées permet de caractériser la dynamique du système (constantes de temps, retard pur, etc...). D'autre part, la détermination de la matrice des gains [Ω] doit le plus souvent faire appel en plus à des séries d'essais en échelons autour de la teinte choisie pour conduire à des résultats cohérents. Les coefficients de correction parfois fournis par les fabricants de colorants peuvent permettre à ce sujet d'utiles comparaisons.

1.4.1. Fonctions de transfert liant la couleur aux débits des colorants

Le système est caractérisé par neuf fonctions de transfert, puisque trois colorants sont utilisés et que la couleur de la feuille de papier s'exprime par l'intermédiaire des trois coordonnées trichromatiques. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné au § 1.2.2.2., l'hypothèse d'une dynamique commune aux différents couplages est très bien vérifiée expérimentalement.

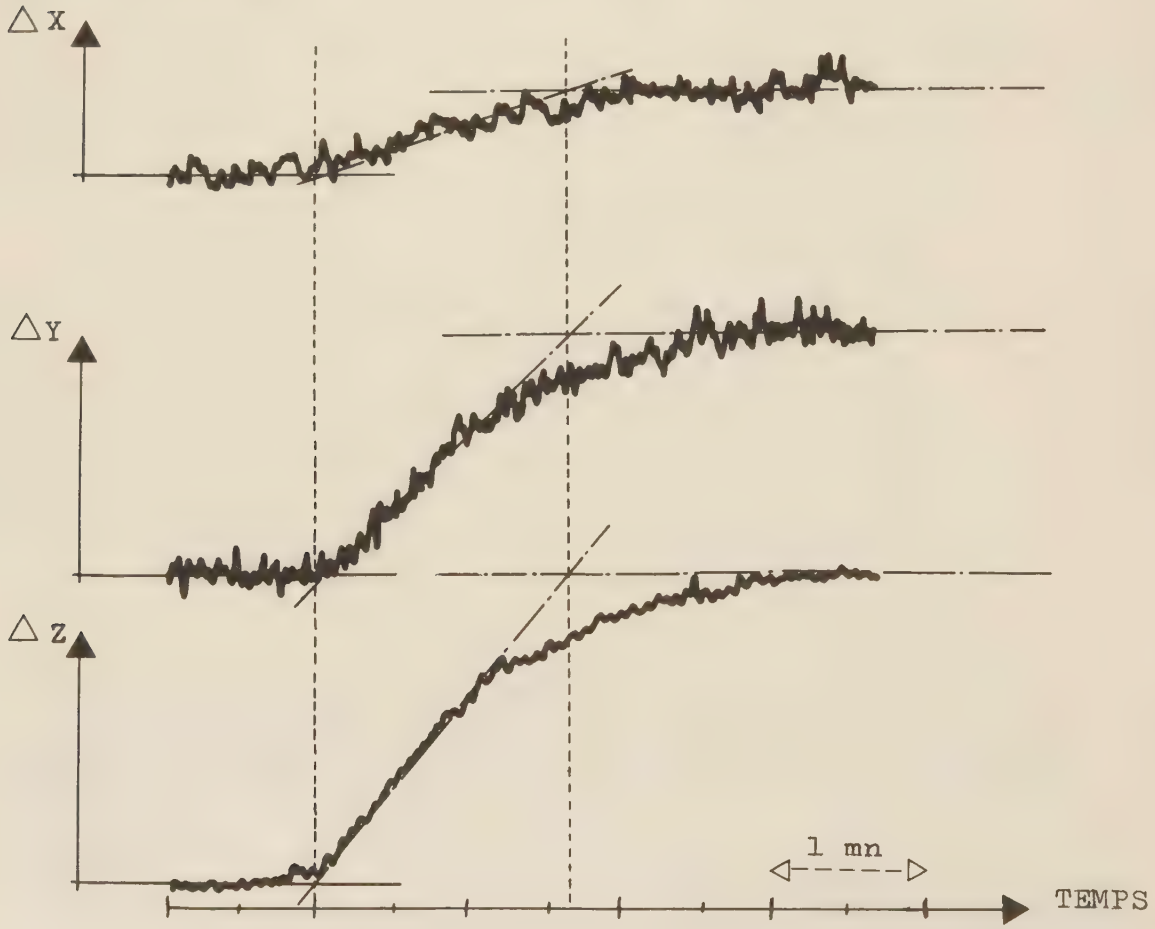


Figure 1.4.1. - COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES COORDONNEES TRICHROMATIQUES

.../...

La figure 1.4.1. présente à titre d'exemple l'évolution des trois coordonnées X, Y, Z pour des variations en échelons simultanées des trois débits de colorants, et illustre assez bien l'identité des comportements dynamiques.

1.4.1.1. Conditions d'expérimentation

Nous avons choisi comme point de fonctionnement une teinte fréquemment fabriquée dans l'industrie, et correspondant à l'emploi effectif de trois colorants (certaines teintes étant couramment réalisées à partir de deux colorants seulement). Il s'agit en l'occurence d'un ton "vert pastel", obtenu à partir de trois colorants : bleu, jaune et rouge.

Les paramètres de fonctionnement caractérisant une couleur de ce type sont situés dans les domaines suivants :

- Coordonnées trichromatiques (en % de blancheur)
  - X : entre 66 et 70 %
  - y : entre 74 et 81 %
  - Z : entre 83 et 88 %

- Concentrations des colorants (en masse, par rapport à la pâte sèche)
  - Bleu : de l'ordre de 0,09 %
  - Jaune : de l'ordre de 0,03 %
  - Rouge : de l'ordre de 0,005 %

Les valeurs de grammage sec et de l'humidité de la feuille de papier fabriquée sont respectivement de l'ordre de 73 g/m^2 et de 6 % d'eau, pour une vitesse générale de la machine de 60 m/mn. Le pH de la solution est de 4,5 dans la cuve de mélange.

Des essais préliminaires sous forme d'échelons fournissent une première idée de la dynamique du système et permettent ainsi de choisir les paramètres des séquences binaires pseudo-aléatoires d'identification. Les résultats indiquent un temps de réponse voisin de 10 minutes, comprenant un retard pur d'environ 2 minutes.

Nous avons donc choisi des valeurs comprises entre 5 et 10 secondes pour la période élémentaire Δt du signal binaire pseudo-aléatoire, avec un registre à décalage de 7 positions donnant une séquence de longueur maximale L égale à 127. L'amplitude des actions sur les débits de colorants est de l'ordre de 5 à 10 % de leurs valeurs statiques respectives.

Comme pour tous les essais d'identification déjà cités, la première séquence envoyée est destinée à mettre le système en régime permanent, la seconde séquence servant effectivement au calcul de la fonction d'intercorrélation.

.../...

1.4.1.2. Fonctions de transfert retenues

Le dépouillement par programamtion non-linéaire des différentes réponses impulsionnelles ainsi obtenues confirme encore l'hypothèse d'une dynamique commune aux neuf couplages intervenant dans le système. Le modèle commun permettant d'approcher au mieux les courbes expérimentales comporte un gain, un retard pur et une constante de temps double.

La forme générale dela fonction de transfert liant la coordonnées trichromatique "i" à la concentration par rapport à la pâte sèche du colorant "j" est donc :

$$F_{ij}(p) = \omega_{ij} \cdot \frac{e^{-\tau_c \cdot p}}{(1+T_c \cdot p)^2}$$

La figure 1.4.2. présente à titre d'exemple l'identification paramètrique d'une réponse impulsionnelle caractérisant bien le comportement dynamique moyen du système.

En regroupant les différents résultats, la fonction de transfert générale adoptée peut s'écrire :

$$F_{ij}(p) = \omega_{ij} \cdot \frac{e^{-125 \cdot p}}{(1+45\ p)^2}$$

En exprimant les gains en % de blancheur par % de colorant dans la pâte sèche, la matrice [Ω] identifiée pour un papier "vert pastel" a par exemple pour expression :

$$[\Omega] = [(\omega_{ij})] = \begin{bmatrix} -209,4 & -7,2 & -112,2 \\ -582,9 & -2,9 & -101,9 \\ -342,5 & -375,6 & -0,8 \end{bmatrix}$$

.../...

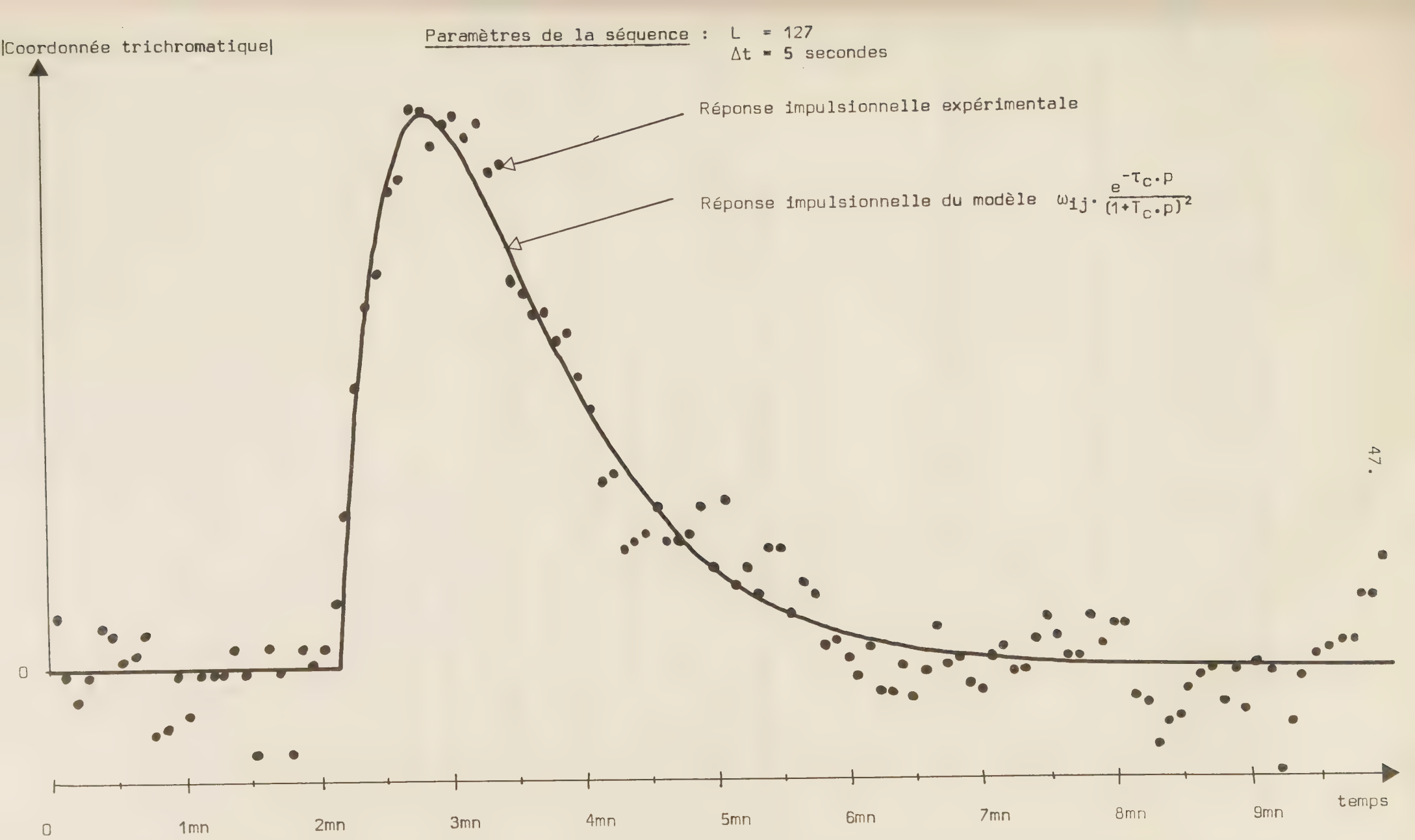


Figure 1.4.2. - REPONSE IMPULSIONNELLE OBTENUE PAR INTERCORRELATION ENTRE UN DEBIT DE COLORANT ET UNE COORDONNEE TRICHROMATIQUE - MODELE DU DEUXIEME ORDRE.

Nous avons également cherché à représenter le comportement dynamique du système par un modèle du 1er ordre avec retard pur. Si l'approximation des réponses impulsionnelles expérimentales est sensiblement moins bonne qu'avec un modèle à constante de temps double, elle semble cependant rester très acceptable, comme l'indique la figure 1.4.3. Pour les réponse indicielles, les performances des deux types de modèles sont par ailleur tout à fait comparables.

La forme de la fonction de transfert correspondante est la suivante :

$$F_{ij}(p) = \omega_{ij} \cdot \frac{e^{-\tau p}}{1+T.p}$$

Pour le point de fonctionnement moyen choisi en exemple et illustré par la figure 1.5.3., l'identification paramétrique conduit à conserver pour la fonction de transfert commune $F_{ij}(p)$ l'expression :

$$F_{ij}(p) = \omega_{ij} \cdot \frac{e^{-135.p}}{1+100.p}$$

1.4.2. Etablissement d'un modèle dynamique en variables d'état

Comme pour le cas du grammage et de l'humidité, il est possible d'obtenir très simplement un modèle en variables d'état de la couleur en discrétisant la fonction de transfert générale continue.

1.4.2.1. Forme générale du modèle adopté

A la suite de différents essais prélimaires, il nous a semblé raisonnable d'assimiler le comportement dynamique du système à un modèle du premier ordre avec retard pur.

Si ΔT est la période d'action choisie pour la commande multidimensionnel de la couleur, la fonction de transfert générale discrète est de la forme

$$F^*_{ij}(z) = \omega_{ij} \frac{(1-a)z^{-(n+1)}}{1-a.z^{-1}}$$

avec $a = e^{-\Delta T/T}$ et $n = \frac{\tau}{\Delta T}$

.../...

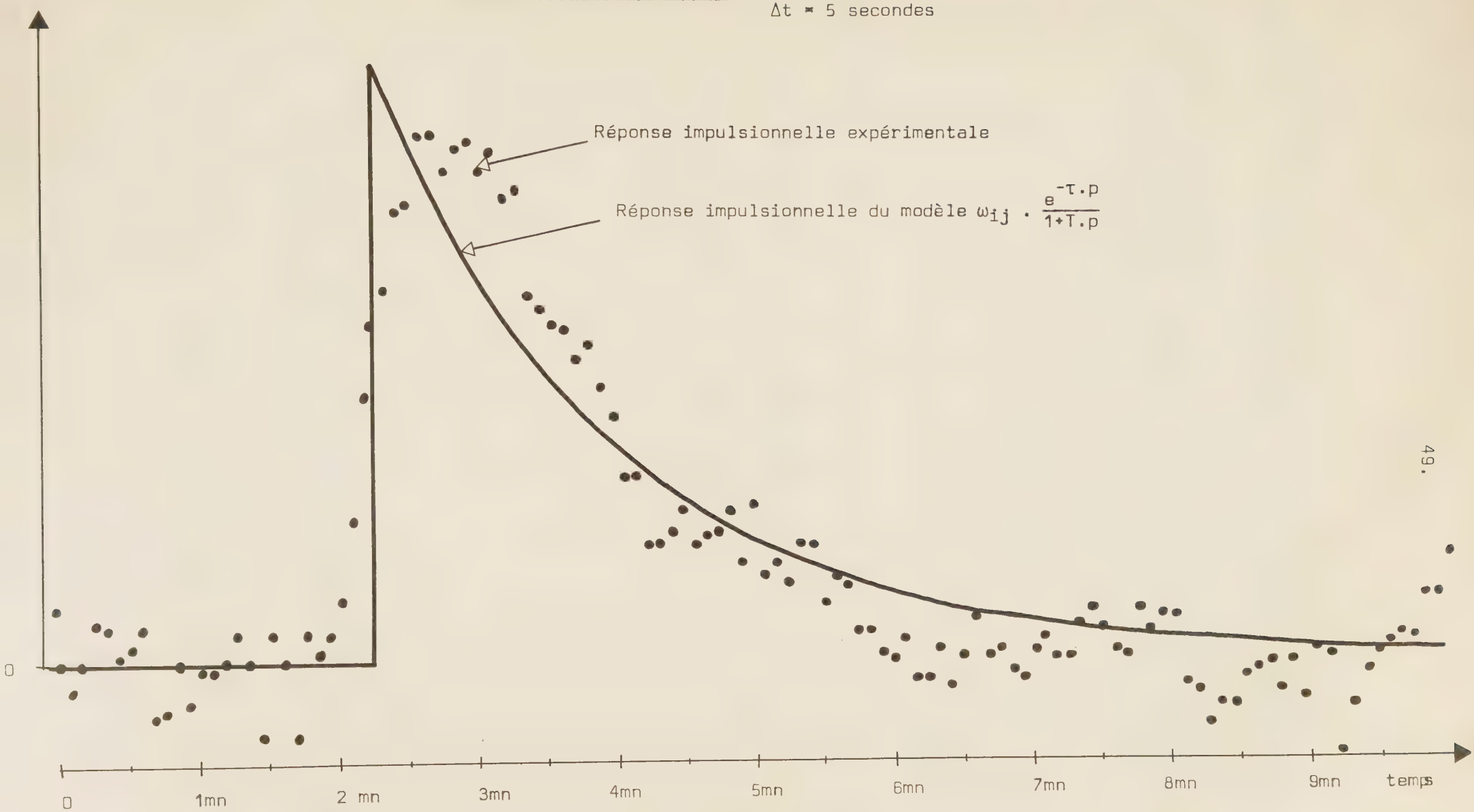


Figure 1.4.3. - REPONSE IMPULSIONNELLE OBTENUE PAR INTERCORRELATION ENTRE UN DEBIT DE COLORANT ET UNE COORDONNEE TRICHROMATIQUE - MODELE DU PREMIER ORDRE.

Pour le point de fonctionnement envisagé correspondant à une vitesse de la machine de 60 m/mn, nous avons adopté pour la période d'action ΔT la valeur de 45 secondes. Les perturbations intervenant sur ce système sont en effet généralement très lentes.

Avec cette valeur de ΔT, nous avons n =3, c'est à dire que la représentation d'état correspondant à la fonction de transfert discrète $F^*_{ij}(z)$ utilise 4 variables. D'après la forme générale du système précédemment explicitée au § 1.2.2.2., le modèle recherché pour caractériser la couleur du papier nécessite donc au total 12 variables d'état.

La représentation finalement adoptée est la suivante :

$$\begin{aligned} \vec{x}(i+1) &= [A] \,.\, \vec{x}(i) + [B] \,.\, \vec{u}(i) \\ \vec{y}(i) &= [C] \,.\, \vec{x}(i) \end{aligned}$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} (1-a) & 0 & 0 \\ 0 & (1-a) & 0 \\ 0 & 0 & (1-a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.../...

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix}$$

matrice des gains $[\Omega]$

Le vecteur d'entrée dynamique $\vec{u}$ comporte trois composantes :

$$\begin{cases} u_1 = \Delta C_1 \text{ (concentration du 1er colorant)} \\ u_2 = \Delta C_2 \text{ (concentration du 2e colorant)} \\ u_3 = \Delta C_3 \text{ (concentration du 3e colorant)} \end{cases}$$

Le vecteur de sortie dynamique $\vec{y}$ est également de dimension trois :

$$\begin{cases} y_1 = \Delta X \\ y_2 = \Delta Y \quad = \text{coordonnées trichromatiques} \\ y_3 = \Delta Z \end{cases}$$

1.4.2.2. Minimalité de la représentation

Une condition nécessaire et suffisante pour que la représentation en variables d'état ainsi déterminée soit minimale est que les matrices de commandabilité $[\Gamma]$ et d'observabilité $[\psi]$ soient de rang maximal, c'est à dire, pour le cas présent, de rang égal à 12. Ces deux matrices sont respectivement définies par :

$$[\Gamma] = [B, A.B, A^2.B, \ldots\ldots\ldots, A^{11}.B]$$

$$\text{et } [\psi] = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C.A^{11} \end{bmatrix}$$

La matrice $[A]$ étant d'une forme très particulière, ses différentes puissances successives s'obtiennent par des règles faciles à mettre en évidence, et il est finalement aisé de conclure à la minimalité de la représentation choisie.

Il convient de remarquer que l'adoption d'une représentation correspondant à une fonction de transfert générale du deuxième ordre avec retard pur ajouterait trois variables d'état supplémentaires, mais ne compliquerait par ailleurs guère la structure du modèle.

.../...

1.5. CONCLUSIONS

Outre les propriétés intéressantes liées à l'emploi comme signal d'excitation de séquences pseudo-aléatoires, la méthode d'intercorrélation utilisée présente l'avantage de ne nécessiter qu'un minimum d'informations préliminaires sur le comportement dynamique du système à identifier. La possibilité, dès le calcul terminé, de visualiser la réponse impulsionnelle ainsi obtenue peut être précieuse pour la poursuite de l'identification, surtout en milieu industriel où le nombre et la durée des essais sont souvent limités. L'approximation paramétrique de la courbe expérimentale à l'aide des méthodes de programmation non-linéaire choisies est par ailleurs très efficace, et offre une grande souplesse pour le choix du modèle.

Il n'en demeure pas moins vrai que l'identification d'un processus industriel est généralement bien trop complexe pour pouvoir être tributaire d'une seule méthode. Il est donc indispensable d'effectuer une synthèse de toutes les informations pouvant être recueillies à propos du système considéré. Aucune procédure d'identification n'a en effet un caractère général, et nous avons simplement cherché, à partir d'études antérieures, à développer une méthode robuste réalisant un bon compromis entre efficacité et simplicité de mise en oeuvre.

De plus, il n'est guère possible de juger par elle-même la qualité d'une identification. Prise isolément, l'approche d'une réponse expérimentale par la réponse d'un modèle n'a le plus souvent pas grande signification: détermination et utilisation d'un modèle nous semblent en fait deux éléments indissociables. Nous avons donc déjà, dans ce chapitre, tenu compte implicitement des performances des commandes multidimensionnelles associées aux modèles proposés.

oOo

D E U X I E M E P A R T I E

COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE EN ASSERVISSEMENT DE SYSTEMES SOUMIS A DES PERTURBATIONS MESURABLES

L'étude de la commande dynamique des systèmes multidimensionnels a connu un essor considérable au cours de la dernière décennie.

Ce développement correspond à un besoin réel très pressant, car la plupart des systèmes physiques complexes comportent plusieurs entrées et plusieurs sorties liées entre elles par des intéractions multiples.

Il est donc particulièrement intéressant de pouvoir aborder le problème de la commande de tels ensembles en disposant de méthodes globales puissantes permettant d'obtenir en boucle fermée certaines caractéristiques souhaitées. Le choix des performances dynamiques, la réduction de l'influence de couplages jugés indésirables et l'annulation des erreurs stationnaires en sont souvent les principaux éléments recherchés.

De plus, quelle que soit la méthode de synthèse employée, elle doit évidemment garantir la stabilité du système bouclé, condition indispensable pour une application industrielle.

2.1. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE COMPORTANT UNE ACTION INTEGRALE

L'utilisation pour la commande des systèmes multidimensionnels des résultats de la théorie de l'optimalisation quadratique conduit à une méthode de synthèse ayant un caractère très général. L'énoncé par PONTRYAGIN du "Principe du minimum" [13], les travaux de KALMAN [14] et d'ATHANS et FALB [15] ont constitué les éléments de base de cette théorie. Les très nombreux développements dont elle a fait l'objet à ce jour en montrent tout l'intérêt et toutes les ressources, et ont pour effet d'en améliorer encore notablement l'efficacité.

2.1.1. Rappel de la structure de commande

Notre but étant de réaliser la commande des systèmes multidimensionnels considérés à l'aide de calculateurs numériques, nous avons choisi de travailler directement à partir des modèles discrets. C'est notamment pour cette raison que nous avons pris comme point de départ de notre étude les résultats obtenus par M. FOND et C. FOULARD [16][17] pour la détermination d'une structure de commande comportant une boucle d'action intégrale. Nous commencerons donc par rappeler succintement les principaux éléments de leurs travaux.

.../...

2.1.1.1. Formulation générale du problème

Le système est supposé avoir une représentation d'état discrète commandable et observable :

$$\begin{cases} \vec{x}(i+1) = [A]\ \vec{x}(i) + [B]\ \vec{u}(i) + \vec{f} \\ \vec{y}(i) = [C]\ \vec{x}(i) \end{cases}$$

$\vec{u}(i)$ est le vecteur d'entrée, de dimension r.

$\vec{x}(i)$ est le vecteur d'état, de dimension n.

$\vec{y}(i)$ est le vecteur de sortie, de dimension m.

$\vec{f}$ est un vecteur constant, de dimension n

Les matrices [A] , [B] et [C] sont constantes, et ont respectivement pour dimensions (nxn), (nxr) et (mxn).

Si $\vec{e}(i)$ est l'écart entre le vecteur constant $\vec{z}$ représentant les consignes et le vecteur de sortie $\vec{y}(i)$, le critère quadratique J à minimiser est choisi tel que :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{N-1} \{\vec{e}(i)^T\ [Q]\ \vec{e}(i) + \vec{u}(i)^T\ [R]\ \vec{u}(i)\}$$

Les matrices de pénalisation [Q] et [R] sont de dimensions (mxm) et (rxr), respectivement semi-définie-positive et définie-positive. Nous les choisissons pour notre part diagonales.

Il est montré que la commande optimale $\vec{u}^*(i)$ minimisant le critère J est alors de la forme :

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = -[L(i)]\ \vec{x}(i) + \vec{\mu}(i)} \qquad (2.1.1.)$$

Cette expression comporte un terme représentant une réaction à partir du vecteur d'état et un terme anticipatif.

La matrice [L(i)] de dimensions (rxn) et le vecteur $\vec{\mu}(i)$ de dimension r sont définis par :

$$\boxed{\begin{aligned} [L(i)] &= \{[R] + [B]^T\ [K(i+1)]\ [B]\}^{-1} \cdot [B]^T\ [K(i+1)]\ [A] \\ \vec{\mu}(i) &= \{[R] + [B]^T\ [K(i+1)]\ [B]\}^{-1} \cdot [B]^T \cdot \{\vec{g}(i+1) - [K(i+1)]\ \vec{f}\} \end{aligned}} \qquad (2.1.2$$

.../...

La matrice [K(i)], de dimensions (nxn), est la solution d'une équation aux différences, qui est souvent appelé "équation de RICCATI" par analogie avec le cas continu :

$$[K(i)] = [A]^T [K(i+1)][A] - [A]^T[K(i+1)] [B] [S(i+1)]^{-1}[B]^T[K(i+1)][A] + [C]^T[Q][C]$$

avec $[S(i+1)] = [R] + [B]^T [K(i+1)] [B]$

(2.1.3.)

Cette équation doit être calculée en temps inverse à partir de la condition finale [K(N)] = [0]. Elle peut aussi se mettre sous la forme :

$$[K(i)] = [A]^T [K(i+1)] . \{[A] - [B][L(i)]\} + [C]^T [Q][C] \quad (2.1.4)$$

Le vecteur $\vec{g}(i)$, de dimension n, est solution d'une équation aux différences de type linéaire :

$$\vec{g}(i) = \{[A] - [B][L(i)]\}^T .\{\vec{g}(i+1) - [K(i+1)] \vec{f}\} + [C]^T [Q]\vec{z} \quad (2.1.5.)$$

Le calcul doit également se faire en temps inverse à partir de la condition finale $\vec{g}(N) = \vec{0}$

Il est montré qu'avec les hypothèses considérées, la loi de commande $\vec{u}^*(i)$ ainsi définie est unique, et que le système bouclé est stable. La matrice [K(i)] est symétrique, définie-positive.

2.1.1.2. Cas d'un horizon infini

L'utilisation de la commande $\vec{u}^*(i)$ sous la forme que nous venons de présenter oblige à calculer les différentes valeurs de la matrice [K] et du vecteur $\vec{g}$ pour tous les instants d'action de l'intervalle de temps (ou "horizon") considéré. Le calcul de ces éléments s'effectuant en temps inverse, il est en effet indispensable de les avoir tous mémorisés avant de pouvoir appliquer effectivement la commande.

C'est pourquoi il est pratiquement très intéressant de supposer l'horizon infini, c'est à dire de définir le critère J par :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \{\vec{e}(i) [Q] \vec{e}(i) + \vec{u}(i) [R]. \vec{u}(i)\}$$

.../...

Pour le type de systèmes étudié et avec les conditions imposées aux matrices [Q] et [R], il est montré que l'équation aux différences de RICCATI (2.1.3.) converge vers une solution-limite unique si le système initial est commandable. Cette condition étant vérifiée, il est donc possible de considérer que la matrice [K(i)] est constante sur tout intervalle de temps, et égale à une matrice symétrique [K] définie-positive.

Le passage au cas de l'horizon infini est moins immédiat en ce qui concerne le vecteur $\vec{g}(i)$, mais il est cependant pratiquement possible d'admettre qu'il est alors égal à un vecteur $\vec{g}$ constant sur tout intervalle de temps suffisamment grand. Il est bien sûr nécessaire pour cela que le vecteur des consignes $\vec{z}$ soit constant, c'est à dire en théorie qu'il ne puisse être changé que sous forme d'échelons à l'instant initial considéré.

Dans ces conditions, la commande optimale $\vec{u}^*(i)$ a pour expression :

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = - [L] \cdot \vec{x}(i) + \vec{\mu}} \qquad (2.1.6.)$$

avec :

$$\boxed{\begin{aligned} [L] &= \{[R] + [B]^T [K][B]\}^{-1} \cdot [B]^T [K][A] \\ \vec{\mu} &= \{[R] + [B]^T [K][B]\}^{-1} \cdot [B]^T \{\vec{g} - [K] \vec{f}\} \end{aligned}} \qquad (2.1.7.)$$

où [K] et $\vec{g}$ sont les solutions-limites en temps inverses des équations aux différences (2.1.3.) et (2.1.5.).

Pratiquement, le cas de l'horizon infini est très généralement adopté pour les problèmes industriels, et c'est celui que nous étudierons donc désormais.

2.1.1.3. Réalisation d'une action intégrale

L'inconvénient majeur de la commande $\vec{u}^*(i)$ que nous venons de rappeler est de ne pas assurer des erreurs stationnaires nulles lorsque les consignes ne sont pas nulles. En effet, la minimisation du critère J correspond en fait à un compromis entre les amplitudes des actions $\vec{u}$ (représentées par le terme $\vec{u}^T[R]\vec{u}$) et les amplitudes des écarts $\vec{e}$ (représentées par le terme $\vec{e}^T[Q]\vec{e}$). Cette propriété est assez gênante pour une utilisation dans l'industrie, où l'on désire généralement que les consignes fixées soient effectivement atteintes.

Ce problème important peut être solutionné en ajoutant au système un certain nombre d'intégrateurs, comme le préconisent notamment M. FOND et C. FOULARD [16] et M. NOUGARET [18]. Ces intégrateurs ont pour entrées respectives les écarts entre consignes et mesures correspondantes.

.../...

Le nombre maximal d'intégrateurs qu'il est ainsi possible d'ajouter au système initial est limité par la condition de commandabilité du système élargi. M. FOND [17] a énoncé une condition nécessaire et suffisante de commandabilité de ce système global. Nous noterons simplement que le nombre d'intégrateurs doit être nécessairement inférieur ou égal au nombre d'entrées. Par ailleurs, pour conserver l'observabilité du système élargi, les sorties des intégrateurs doivent apparaître dans le vecteur de sortie global.

Pratiquement, le nombre d'actions est généralement au moins égal au nombre de sorties que l'on désire commander, et nous supposerons pour la simplicité des notations que la dimension du vecteur de sortie des intégrateurs $\vec{v}(i)$ est égale à m, dimension du vecteur de sortie $\vec{y}(i)$ du système initial.

Dans l'optique discrète que nous avons choisie, les intégrations sont réalisées numériquement :

$$\vec{v}(i+1) = \vec{v}(i) + \Delta T \cdot \vec{e}(i)$$

ou ΔT est la période d'action de la commande.

En fait, pour des raisons de facilité de mise en oeuvre dans le calculateur industriel couplé au procédé, nous avons préféré diviser par ΔT le gain de la fonction de transfert correspondante et conserver comme formule d'intégration :

$$\boxed{\vec{v}(i+1) = \vec{v}(i) + \vec{e}(i) = \vec{v}(i) + \vec{z} - \vec{y}(i)} \qquad (2.1.8.)$$

soit encore :

$$\boxed{\vec{v}(i+1) = \vec{v}(i) - [C].\vec{x}(i) + \vec{z}} \qquad (2.1.9.)$$

Les équations d'état du système élargi sont alors :

$$\begin{bmatrix} \vec{x}(i+1) \\ \vec{v}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [O] \\ -[C] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{v}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] \\ [O] \end{bmatrix} \vec{u}(i) + \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{y}(i) \\ \vec{v}(i) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} [C] & [O] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{v}(i) \end{bmatrix} \qquad (2.1.10.)$$

où I est la matrice unitaire d'ordre m.

..../...

Cette représentation peut être mise sous la forme condensée suivante,

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x}_1(i+1) &= [A_1]\,\vec{x}_1(i) + [B_1]\,\vec{u}(i) + \vec{f}_1 \\ \vec{y}_1(i) &= [C_1]\,\vec{x}_1(i)\end{aligned}} \qquad (2.1.11.)$$

dans laquelle :

$\vec{x}_1(i) = \begin{bmatrix}\vec{x}(i)\\ \vec{v}(i)\end{bmatrix}$ est un vecteur de dimension (n+m),

$\vec{y}_1(i) = \begin{bmatrix}\vec{y}(i)\\ \vec{v}(i)\end{bmatrix}$ est un vecteur de dimension (m+m),

$\vec{f}_1 = \begin{bmatrix}\vec{f}\\ \vec{z}\end{bmatrix}$ est un vecteur de dimension (n+m),

$[A_1]$ est une matrice de dimensions (n+m) x (n+m),

$[B_1]$ est une matrice de dimensions (n+m) x r,

$[C_1]$ est une matrice de dimensions (m+m) x (n+m).

2.1.1.4. Expression de la commande

Le critère J_1 à minimiser a alors pour expression :

$$J_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{\infty} \{\vec{e}_1(i)^T\,[Q_1]\;\vec{e}_1(i) + \vec{u}(i)^T\,[R]\;\vec{u}(i)\}$$

où $[Q_1]$ est une matrice choisie diagonale de dimensions (m+m) x (m+m) et $\vec{e}_1$ le vecteur d'écart global de dimension (m+m), respectivement définis par :

$$[Q_1] = \begin{bmatrix}[Q] & [O]\\ [O] & [Q_\sigma]\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_1(i) = \begin{bmatrix}\vec{z}\\ \vec{o}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\vec{y}(i)\\ \vec{v}(i)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{e}(i)\\ -\vec{v}(i)\end{bmatrix}$$

Le critère J_1 peut donc encore s'écrire en faisant apparaître un terme de pondération "proportionnelle" et un terme de pondération "intégrale":

$$J_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{\infty} \{\vec{e}(i)^T\,[Q]\;\vec{e}(i) + \vec{v}(i)^T\,[Q_\sigma]\;\vec{v}(i) + \vec{u}(i)^T\,[R]\;\vec{u}(i)\}$$

.../...

Il est alors possible de calculer pour le système élargi (2.1.11.) la commande optimale $\vec{u}^*(i)$ minimisant le critère J_1, de la manière rappelée au § 2.1.1.2.

La commande $\vec{u}^*(i)$ ainsi déterminée est de la forme :

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = - [L_1] \cdot \vec{x}_1(i) + \vec{\mu}_1} \qquad (2.1.12.)$$

ou encore, en décomposant la matrice $[L_1]$ de dimensions r x (n+m)

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = - [L] \vec{x}(i) - [M] \vec{v}(i) + \mu_1} \qquad (2.1.13.)$$

Il convient de remarquer cependant que la matrice [L] ainsi définie n'est pas la même que la matrice [L] obtenue au § 2.1.1.2. lors du calcul de la commande du système ne comportant pas les intégrateurs.

Les éléments de cette nouvelle commande sont définis par les expressions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} [L_1] &= \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T [K_1][A_1] \\ \vec{\mu}_1 &= \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{\vec{g}_1 - [K_1] \vec{f}_1\} \end{aligned}} \qquad (2.1.14.)$$

$[K_1]$ est une matrice symétrique et définie-positive, de dimensions (n+m) x (n+m), solution-limite en temps inverse de l'équation aux différences de type RICCATI :

$$\boxed{\begin{aligned} &[K_1(i)] = [A_1]^T [K_1(i+1)][A_1] - [A_1]^T [K_1(i+1)][B_1][S_1(i+1)]^{-1} [B_1]^T \\ &[K_1(i+1)][A_1] + [C_1]^T [Q_1][C_1] \\ &\text{avec } [S_1(i+1)] = [R] + [B_1]^T [K_1(i+1)][B_1] \end{aligned}} \qquad (2.1.15.)$$

$\vec{g}_1$ est un vecteur de dimension (n+m), solution-limite en temps inverse de l'équation aux différences de type linéaire :

$$\boxed{\vec{g}_1(i) = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \cdot \{\vec{g}_1(i+1) - [K_1] \vec{f}_1\} + [C_1]^T [Q_1] \vec{z}_1}$$

où z_1 serait le vecteur $\begin{bmatrix} \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$, de dimension (m+m)

.../...

Nous pouvons donc écrire également, en faisant apparaître seulement le vecteur $\vec{z}$:

$$\vec{g}_1(i) = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \cdot \{\vec{g}_1(i+1) - [K_1]\vec{f}_1\} + [C_1]^T [Q_1] [\Theta_a] \vec{z} \qquad (2.1.16.)$$

$[\Theta_a]$ est une matrice de dimension (m+m) x m définie par :

$[\Theta_a] = \begin{bmatrix} [I] \\ [o] \end{bmatrix}$, [I] étant la matrice unitaire d'ordre m.

Les deux équations aux différences précédentes sont calculées en temps inverse à partir de conditions finales nulles.

2.1.2. Calcul de la matrice d'anticipation

La partie prédictive de la commande, caractérisée par le vecteur $\vec{\mu}_1$, dépend en fait uniquement du vecteur des consignes $\vec{z}$ lorsque le vecteur constant $\vec{f}$ caractérisant une perturbation sur l'état est nul. Il est alors intéressant de chercher à exprimer directement le vecteur $\vec{\mu}_1$ en fonction de $\vec{z}$. Deux principaux moyens de calcul sont pour cela possibles.

2.1.2.1. Calcul par intégrations successives

Cette solution, proposée par M. FOND [17] , est également valable lorsque le vecteur $\vec{f}$ est une fonction linéaire du vecteur des consignes $\vec{z}$.

Nous recherchons donc une matrice [N] appelée "matrice d'anticipation", de dimensions r x m, telle que :

$$\vec{\mu}_1 = [N] \cdot \vec{z}$$

Si nous supposons que le vecteur $\vec{z}$ est nul à l'exception de la jème consigne z_j égale à 1, le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_1$ calculé à partir de l'expression (2.1.14.) en intégrant l'équation aux différences (2.1.16 représente alors très exactement la jème colonne de la matrice [N] recherchée.

Par suite, en répétant m fois l'opération avec pour chaque calcul une seule consigne égale à 1 et les (m-1) autres nulles, il est possible d'identifier successivement les m colonnes de la matrice d'anticipation [N].

La commande $\vec{u}^*(i)$ a alors pour expression générale :

$$\vec{u}^*(i) = - [L] \cdot \vec{x}(i) - [M] \vec{v}(i) + [N] \vec{z} \qquad (2.1.17.)$$

.../...

2.1.2.2. Calcul algébrique direct

La solution précédente se révèle à l'usage assez lourde du point de vue du temps de calcul, puisqu'il faut en effet intégrer m fois une équation aux différences.

Nous avons donc cherché un moyen plus rapide de déterminer la matrice d'anticipation [N].

Rappelons tout d'abord l'expression (2.1.14.) définissant le vecteur $\vec{\mu}_1$:

$$\vec{\mu}_1 = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \vec{g}_1 - [K_1] \cdot \vec{f}_1 \qquad (2.1.14.)$$

La solution-limite $\vec{g}_1$ de l'équation aux différences (2.1.16.) doit vérifier :

$$\vec{g}_1 = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \cdot \{\vec{g}_1 - [K_1] f_1\} + [C_1]^T [Q_1][\textcircled{H}_a] \vec{z} \qquad (2.1.18.)$$

En posant $\vec{h} = \vec{g}_1 - [K_1] \vec{f}_1$, ces expressions deviennent :

$$\vec{\mu}_1 = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} \cdot [B_1]^T \cdot \vec{h} \qquad (2.1.19.)$$

$$\vec{h} = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \cdot \vec{h} + [C_1]^T [Q_1][\textcircled{H}_a] \vec{z} - [K_1] \vec{f}_1 \qquad (2.1.20.)$$

Considérons alors une matrice $[\textcircled{H}_b]$, de dimensions (n+m) x m, telle que :

$[\textcircled{H}_b] = \begin{bmatrix} [o] \\ [I] \end{bmatrix}$ où [I] est la matrice unitaire d'ordre m.

En supposant le vecteur $\vec{f}$ nul, le vecteur $\vec{f}_1$ peut s'écrire :

$$\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} \vec{o} \\ \vec{z} \end{bmatrix} = [\textcircled{H}_b] \vec{z}$$

L'expression (2.1.20.) définissant le vecteur $\vec{h}$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\vec{h} = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \cdot \vec{h} + [C_1]^T [Q_1][\textcircled{H}_a] \vec{z} - [K_1][\textcircled{H}_b] \vec{z}$$

.../...

soit encore :

$$\{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\} \cdot \vec{h} = \{[C_1]^T [Q_1][\textcircled{H}_a] - [K_1][\textcircled{H}_b]\} \cdot \vec{z}$$

(2.1.21.)

où [I] est la matrice unitaire d'ordre (n+m)

Etudions les conditions d'inversibilité dela matrice pré-multipliant le vecteur $\vec{h}$. Cette matrice est singulière lorsque son déterminant est nul.

Or, dét $\{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\} = o$ signifie que la matrice $\{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T$, et donc aussi la matrice transposée $[A_1] - [B_1][L_1]$, possèdent au moins une valeur propre égale à 1.

$[A_1] - [B_1][L_1]$ étant la matrice dévolution du système muni de sa commande la nullité du déterminant précédent ne peut par conséquent se produire que si le système présente <u>en boucle fermée</u> un élément d'intégration ! La méthode choisie pour la détermination de la commande assurant la stabilité du système bouclé, ce cas n'est donc pas à prendre en considération.

Il est par suite toujours possible d'inverser la matrice $[I] - \{[A_1][B_1][L_1]$ et d'exprimer le vecteur $\vec{h}$ sous la forme :

$$\vec{h} = \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} \cdot \{[C_1]^T [Q_1][\textcircled{H}_a] - [K_1][\textcircled{H}_b]\} \vec{z}$$

D'après la relation (2.1.19.) liant le vecteur $\vec{\mu}_1$ au vecteur $\vec{h}$, la matrice d'anticipation [N] a donc finalement pour expression :

$$[N] = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - [A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1}$$
$$\{[C_1]^T [Q_1][\textcircled{H}_a] - [K_1][\textcircled{H}_b]\}$$

(2.1.22.)

Rappelons que les matrices $[\textcircled{H}_a]$ et $[\textcircled{H}_b]$, respectivement de dimensions (m+m) x m et (n+m) x m sont définies par :

$$[\textcircled{H}_a] = \begin{bmatrix} [I] \\ [o] \end{bmatrix} \text{ et } [\textcircled{H}_b] = \begin{bmatrix} [o] \\ [I] \end{bmatrix}$$

Il est ainsi possible de calculer la matrice d'anticipation [N] par une méthode purement algébrique, sans jamais avoir à intégrer l'équation aux différences linéaire (2.1.16.)

.../...

Nous verrons ultérieurement que cette méthode est très facilement transposable au cas où le vecteur constant $\vec{f}$ n'est pas nul.

Le schéma général du système muni de sa commande $\vec{u}^*(i) = -[L]\vec{x}(i) - [M]\vec{v}(i) + [N]\vec{z}$ est représenté par la figure 2.1.1.

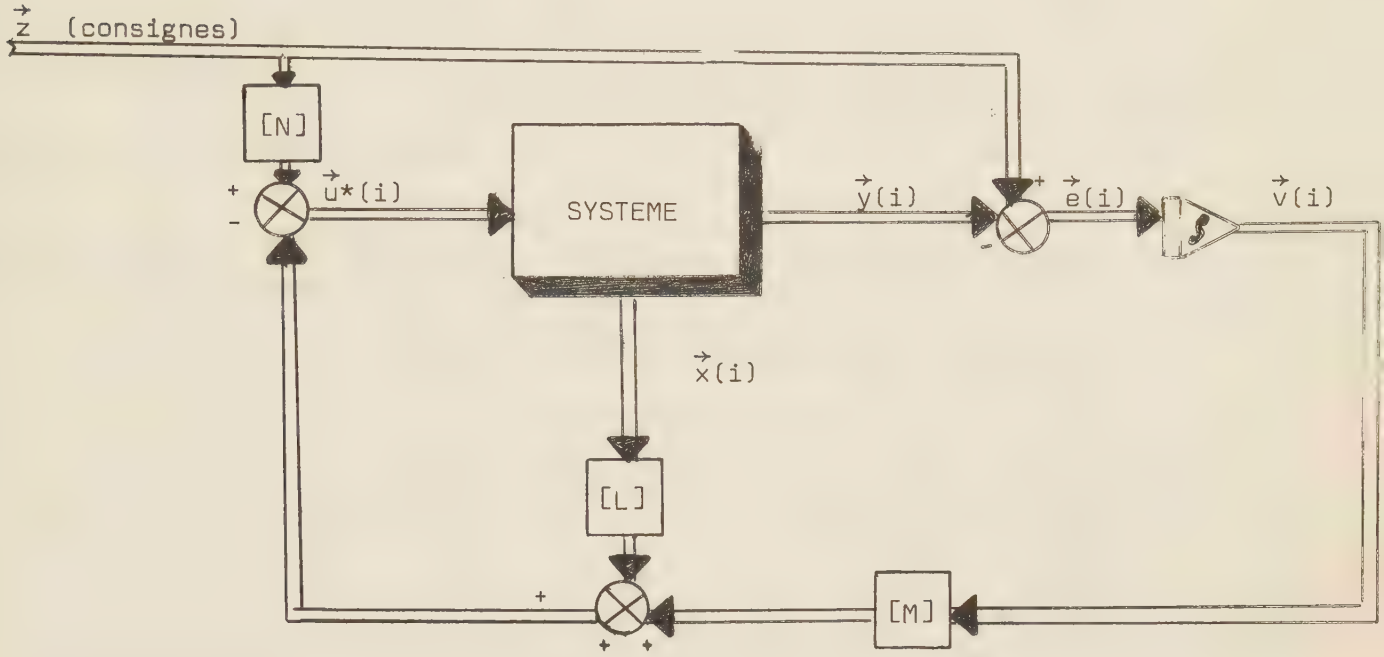


Figure 2.1.1. - SCHEMA GENERAL DE LA COMMANDE

Ce mode de commande est parfois appelé "commande multidimensionnelle de type P.I.", par analogie avec les régulateurs classiques comportant une action "proportionnelle" et une action "intégrale". En fait, il est possible de montrer que la partie prédictive de la commande introduit également un effet comparable aux actions dérivées successives d'un régulateur conventionnel.

.../...

2.1.3. Rappel de la structure de l'estimateur -filtre

La commande que nous venons de décrire comporte le terme $-[L]\vec{x}(i)$ correspondant à une réaction à partir des variables d'état du procédé. Or, ces variables d'état ne sont généralement pas accessibles à la mesure, ou n'ont même pas de signification physique directe. Il convient donc de réaliser un estimateur (ou observateur) permettant de reconstituer le vecteur d'état à partir des grandeurs effectivement mesurables sur le système, c'est à dire son vecteur d'entrée $\vec{u}$ et son vecteur de sortie $\vec{y}$.

2.1.3.1. Estimation des variables d'état

Nous ne reviendrons pas en détail sur la méthode de calcul proposée par M. FOND [17] que nous avons adoptée.

Cette méthode permet de déterminer un estimateur d'ordre n en appliquant la théorie de la commande optimale à un système dual du système considéré.

Les formules recurrentes conduisant au vecteur d'état estimé $\vec{\hat{x}}(i)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \vec{x}^*(i) = [A]\,\vec{\hat{x}}\,(i-1) + [B]\,\vec{u}(i-1) \\ \vec{y}^*(i) = [C]\,\vec{x}^*(i) \\ \vec{\hat{x}}(i) = \vec{x}^*(i) + [G]\,.\,(\vec{y}(i) - \vec{y}^*(i)) \end{cases} \qquad (2.1.23.)$$

$\vec{x}^*(i)$ représente la prédiction pour l'instant "i" du vecteur d'état, effectuée à l'instant "i-1". De même, $\vec{y}^*(i)$ est la prédiction du vecteur de sortie à l'instant "i", effectuée à l'instant "i-1".

Le terme correctif $[G].(\vec{y}(i) - \vec{y}^*(i))$ permet donc, à l'instant "i", de réajuster l'estimation $\vec{\hat{x}}(i)$ par rapport à sa prédiction $\vec{x}^*(i)$ en fonction de l'écart constaté entre la mesure réelle $\vec{y}(i)$ et la mesure prédite $\vec{y}^*(i)$.

La matrice [G] est appelée "matrice de bouclage" de l'estimateur.

La méthode de calcul proposée présente l'avantage de pouvoir être envisagée aussi bien du point de vue stochastique que du point de vue déterministe. Dans l'optique stochastique, l'estimateur ainsi déterminé est analogue à un filtre de KALMAN-BUCY. Dans l'optique déterministe qui est celle que nous avons adoptée, l'estimateur représente un observateur de LUENBERGER d'ordre n. Par la méthode de synthèse utilisée, il est alors relativement simple de calculer une matrice de bouclage [G] conférant à l'estimateur le comportement dynamique souhaité, en fonction de la dynamique propre du système.

Il convient de remarquer que l'assimilation de l'estimateur calculé à un observateur déterministe de LUENBERGER présente l'avantage de ne nécessiter aucune hypothèse sur les caractères gaussien et centré du bruit présent sur le système, ce qui est souvent intéressant pour des applications industrielles.

.../...

Il faut enfin noter que le vecteur de sortie $\vec{y}$ utilisé par l'estimateur peut comporter des sorties du système autres que les sorties à commander. Il y a en effet intérêt à utiliser toute l'information disponible sur le procédé, et donc à prendre en compte de telles sorties supplémentaires, dans la mesure évidemment où elles contribuent à améliorer l'estimation du vecteur d'état.

2.1.3.2. Filtrage des mesures

L'acquisition des mesures effectuées sur un procédé industriel nécessite souvent un filtrage numérique. Il est donc intéressant de chercher à réaliser ce filtrage des mesures à partir de la structure utilisée pour estimer le vecteur d'état.

Lorsque les perturbations intervenant sur le système sont à valeurs moyennes nulles, le résultat est immédiat : le vecteur des sorties prédites $\vec{y}^*(i)$ défini par les équations recurrentes (2.1.23.) peut être considéré directement comme le vecteur des mesures filtrées. En régime permanent, ce vecteur est bien égal au vecteur des mesures réelles $\vec{y}(i)$.

Cependant, lorsque les perturbations ont des valeurs moyennes non nulles, il subsiste une erreur stationnaire entre le vecteur d'état réel et le vecteur d'état estimé, et donc aussi entre le vecteur de sortie réel et le vecteur de sortie prédit. Or, en milieu industriel, de très nombreuses causes peuvent entraîner des perturbations à valeurs moyennes non nulles.

Pratiquement, l'erreur d'estimation sur le vecteur d'état n'est pas gênante dans la mesure où la structure de commande comporte une action intégrale assurant en régime permanent l'égalité entre les valeurs moyennes des sorties et les consignes correspondantes. Par contre, l'estimateur n'est alors plus utilisable sous la forme précédente en qualité de filtre, puisqu'il est généralement indispensable d'avoir en régime permanent l'égalité des valeurs moyennes des mesures et des mesures filtrées homologues.

En ramenant sur les sorties les valeurs moyennes (supposées constantes ou lentement variables) de ces perturbations, il est cependant possible de les faire figurer dans le modèle du système par un vecteur $\vec{p}(i)$ de dimension m :

$$\begin{bmatrix} \vec{x}(i+1) \\ \vec{p}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [O] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{p}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] \\ [O] \end{bmatrix} \vec{u}(i)$$

$$\vec{y}(i) = \begin{bmatrix} [C] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{p}(i) \end{bmatrix} \qquad (2.1.24.)$$

où [I] est la matrice unitaire d'ordre m.

.../...

L'estimateur peut alors être calculé à partir de ce modèle global pour fournir, en plus de l'estimation du vecteur d'état $\vec{x}(i)$, une estimation $\vec{p}(i)$ de ce vecteur supposé constant $\vec{p}$.

En décomposant la matrice de bouclage [G] de l'observateur en deux matrices $[G_1]$ et $[G_2]$, respectivement de dimensions (nxm) et (mxm) et telles que $[G] = \begin{bmatrix}[G_1]\\[G_2]\end{bmatrix}$, les équations recurrentes deviennent :

$$
\begin{aligned}
\vec{x}^{**}(i) &= [A]\,\vec{x}(i-1) + [B]\,\vec{u}(i-1)\\
\vec{y}^{**}(i) &= [C]\,\vec{x}^{**}(i) + \vec{p}(i-1)\\
\vec{x}(i) &= \vec{x}^{**}(i) + [G_1]\,.\,(\vec{y}(i) - \vec{y}^{**}(i))\\
\vec{p}(i) &= \vec{p}(i-1) + [G_2].\,(\vec{y}(i) - \vec{y}^{**}(i))\\
\vec{\hat{y}}(i) &= [C]\,\vec{x}(i) + \vec{p}(i)
\end{aligned}
\qquad (2.1.25.)
$$

$\vec{y}^{**}(i)$ représente toujours la prédiction des mesures de l'instant "i" effectuée à l'instant "i-1".

$\vec{\hat{y}}(i)$ peut être pris comme le vecteur des mesures filtrées à l'instant "i".

D'après la forme de l'équation recurrente définissant le vecteur $\vec{p}(i)$, il est évident qu'un tel estimateur-filtre assure, en régime permanent, l'égalité des valeurs moyennes des vecteurs $\vec{y}(i)$, $\vec{y}^{*}(i)$ et $\vec{\hat{y}}(i)$.

C'est cette structure complète comprenant l'estimation du vecteur d'état et le filtrage des mesures que nous avons mise en oeuvre sur les procédés physiques étudiés.

La forme générale d'un tel estimateur-filtre est illustrée par la figure 2.1.2., où l'ensemble est supposé être représenté à l'instant "i".

.../...

N.B. : Les modules $\mathcal{R}$ représentent symboliquement une temporisation égale à 1 période d'échantillonnage

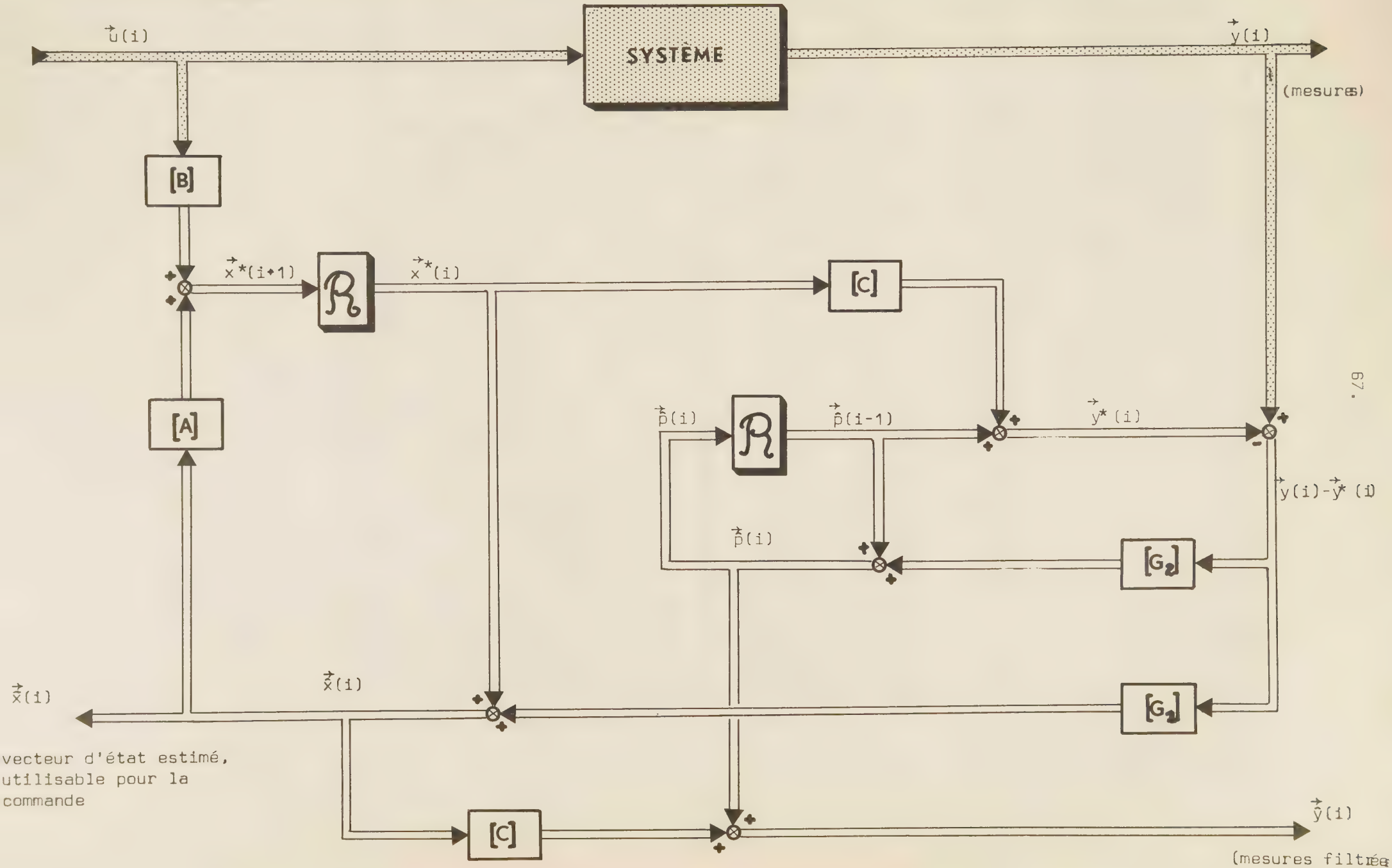


Figure 2.1.2. - SCHEMA D'ENSEMBLE DE L'ESTIMATEUR-FILTRE

2.2. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE EN ASSERVISSEMENT

La commande multidimensionnelle comportant une action intégrale, telle que nous venons d'en rappeler la structure, se révèle très performante lorsqu'elle est utilisée pour une fonction de régulation. En présence de perturbations inconnues modifiant l'état du système, les termes $-[L]\vec{x}(i)$ et $-[M]\vec{v}(i)$, correspondant à des réactions à partir respectivement du vecteur d'état et des intégrales des écarts, assurent parfaitement le retour à l'égalité entre les valeurs moyennes des sorties et leurs consignes. La dynamique en est relativement facile à choisir en fonction des caractéristiques du procédé.

Cependant, une maitrise correcte du système semble beaucoup plus difficile à obtenir lorsque la structure d'action envisagée est utilisée pour une fonction d'asservissement, c'est à dire lors de modifications apportées au vecteur des consignes $\vec{z}$.

2.2.1. Fonctionnement en asservissement

Il nous semble par conséquent intéressant de chercher à mieux prendre en compte, lors du calcul de la commande, son éventuelle utilisation en asservissement. Pour cela, il faut tout d'abord tenter de mettre en évidence certains aspects particuliers du comportement du système muni de sa commande lors d'un changement de son point de consigne. Cette analyse qualitative sommaire permettra d'envisager une solution possible au problème ainsi posé.

2.2.1.1. Problème des changements de consignes

La méthode de calcul rappelée précédemment suppose que les changements des consignes sont effectués sous forme d'échelons. Par suite, le critère qui doit être minimisé est une fonction de l'écart existant entre les consignes variant en échelons et les sorties correspondantes du procédé. En fait, la commande tendra donc à rapprocher la réponse du système d'une évolution en échelon. Pour réaliser en quelque sorte une compensation de la dynamique du procédé, les amplitudes des premières actions, introduites par le terme $[N]\vec{z}$, sont donc généralement très fortes, souvent égales à plusieurs fois les valeurs permanentes finalement atteintes. Or, industriellement, il est rare qu'il soit indispensable de forcer le système à répondre presque en échelon et, d'autre part, il n'est de toute façon pratiquement jamais souhaitable d'imposer aux actionneurs des variations aussi brutales.

La solution qui parait la plus simple pour corriger cet état de fait consiste à jouer sur la pondération relative des différents termes intervenant dans le critère de pénalisation J_1 :

$$J_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{\infty} \{\vec{e_1}(i)^T [Q_1] \vec{e_1}(i) + \vec{u}(i)^T [R] \vec{u}(i)\}$$

.../...

Pour diminuer l'amplitude des actions, il suffit en principe d'augmenter globalement la valeur des coefficients de la matrice [R] par rapport aux coefficients de la matrice $[Q_1]$.

Il est effectivement possible, de cette manière d'arriver à obtenir des commandes conférant au système, lors de changements de consignes, une évolution dynamique correcte en même temps que des amplitudes d'actions compatibles avec une utilisation pratique.

Cependant, le choix d'un tel type de critère de pénalisation influe évidemment aussi sur le comportement du système en régulation. Les écarts entre consignes et mesures et leurs intégrales étant peu pondérés dans l'expression du critère, la compensation des perturbations est en conséquence très lente, et bien peu satisfaisante par rapport aux performances potentielles de la structure de commande choisie.

Par ailleurs, la présence de l'action intégrale peut entraîner des dépassements importants sur les sorties. Ce phénomènes est surtout sensible pour les systèmes très lents, et devient particulièrement apparent dans le cas de procédés comportant des retards purs. En effet, pour de tels systèmes, l'action intégrale se développe tout au long de la première phase de l'évolution, alors même que l'écart reste important entre consigne et mesure. Il s'ensuit, dans une seconde phase, une variation trop importante de la sortie qui peut ainsi notablement dépasser la valeur de la consigne. Il est alors nécessaire d'attendre un certain temps pour que dans une troisième phase, la mesure revienne à la valeur désirée. Un exemple schématique d'un tel comportement est représenté sur la figure 2.2.1.

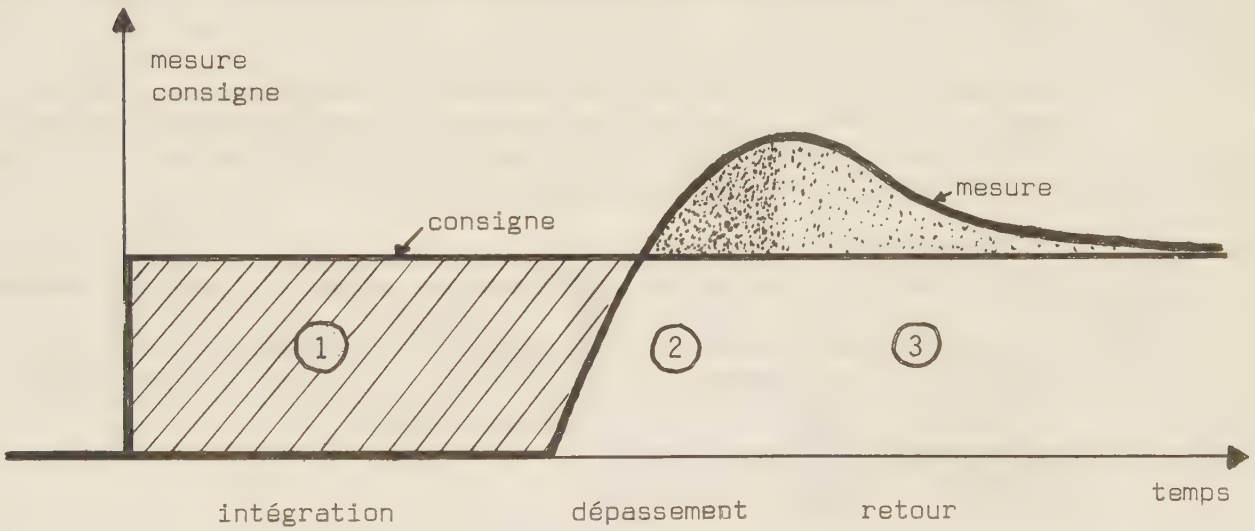
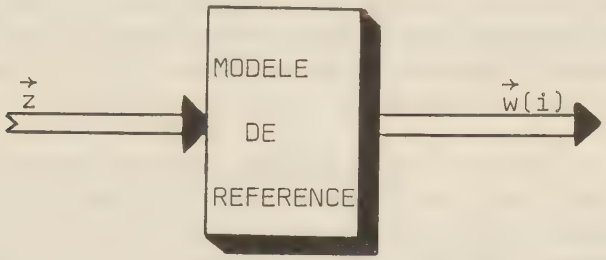


Figure 2.2.1. - DEPASSEMENT SUR LA SORTIE DUE A L'ACTION INTEGRALE

2.2.1.2. *Utilisation d'un modèle de référence*

L'étude sommaire que nous venons de présenter montre qu'en fait, c'est la forme imposée aux variations des consignes et prise en compte dans le calcul de la commande qui apparaît être la cause essentielle du comportement souvent peu satisfaisant constaté lors d'utilisations en asservissement.

Nous avons donc introduit dans la structure de commande un "modèle de référence", ayant pour entrée le vecteur-consigne $\vec{z}$ précédemment considéré dont les variations sont toujours effectuées sous forme d'échelons.



Le vecteur de sorties $\vec{w}(i)$ de ce modèle de référence représente la forme d'évolution réellement souhaitée pour le vecteur de sortie $\vec{y}(i)$ du procédé. En régime permanent, pour les problèmes de changements de consignes que nous étudions, nous devons évidemment avoir $\vec{w}(i) = \vec{z}$.

Ce modèle de référence peut être considéré comme un processus générateur parallèle au système physique, dont il représenterait le fonctionnement idéal désiré.

Ce modèle de référence doit généralement présenter une structure parfaitement découplée. En effet, le changement souhaité pour l'une des valeurs de consigne ne doit faire varier que la sortie correspondante du modèle de référence, sans perturber les autres.

La dynamique des différents blocs intervenant dans ce modèle de référence est choisie en fonction des performances souhaitées pour le système réel.

La représentation adoptée pour le processus générateur est bien sûr une formulation par équations d'état discrètes, que nous noterons de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{s}(i+1) = [E]\,\vec{s}(i) + [F]\,\vec{z} \\ \vec{w}(i) = [H]\,\vec{s}(i) \end{cases}$$

$\vec{s}(i)$ est le vecteur d'état du modèle de référence, de dimension ℓ.
$\vec{z}$ est le vecteur des consignes du procédé, de dimension m.
$\vec{w}(i)$ est le vecteur des sorties du modèle de référence, de dimension m.

.../...

[E], [F] et [H] sont des matrices à coefficients constants, respectivement de dimensions (ℓxℓ), (ℓxm) et (mxℓ).

Remarque :

Il pourrait sembler intéressant de considérer un processus générateur dont la matrice de sortie [H] soit identique à la matrice de sortie [C] du système. La comparaison entre les comportements du système et de son modèle de référence pourrait alors s'effectuer directement à partir de leurs vecteurs d'état respectifs. Nous avons cependant préféré conserver pour la matrice [H] une possibilité de choix. D'une part, cela permet de ne faire aucune hypothèse sur l'ordre du processus générateur, c'est à dire de ne pas imposer ℓ= n. D'autre part, le modèle de référence présente généralement une structure parfaitement découplée, c'est à dire qu'une variation de z_j n'entraine de variation que sur $w_j(i)$. Il n'en est pas de même pour le procédé réel multidimensionnel et les couplages apparaissent alors souvent dans la matrice [C] . Pour pouvoir réaliser l'égalité [C] = [H], il faudrait par suite effectuer une transformation linéaire sur le vecteur d'état du système, opération qui fait perdre aux matrices [A] et [B]tous les avantages de simplicité qu'elles présentent souvent initialement, et qui peuvent être précieuses lors d'une application pratique utilisant un calculateur industriel de petite configuration.

2.2.1.3. *Prise en compte du modèle de référence*

Les caractéristiques du modèle de référence étant choisies, il faut alors l'inclure dans la représentation d'état globale du système. Nous considérons bien sûr toujours que la structure de commande comporte m intégrateurs. Mais les entrées de ces intégrateurs ne doivent plus être maintenant les écarts $(\vec{z}-y(i))$, mais les écarts entre les sorties du modèle de référence et les sorties du procédé, c'est à dire $(\vec{w}(i) - \vec{y}(i))$ ou encore $[H]\vec{s}(i) - [C]\vec{x}(i)$.

La figure 2.2.2. illustre la forme globale du système finalement pris en compte.

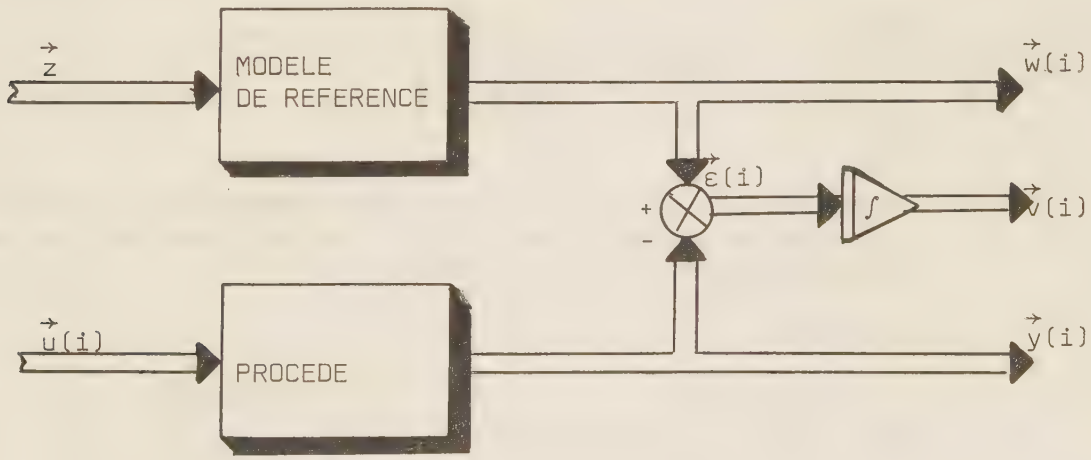


Figure 2.2.2. - SCHEMA DU SYSTEME GLOBAL

.../...

En rassemblant les équations d'état relatives au système initial, aux intégrateurs et au processus générateur, la représentation discrète globale est donc la suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{x}(i+1) \\ \vec{v}(i+1) \\ \vec{s}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A][O][O] \\ -[C][I][H] \\ [O][O][E] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{v}(i) \\ \vec{s}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] \\ [O] \\ [O] \end{bmatrix} \vec{u}(i) + \begin{bmatrix} [O] \\ [O] \\ [F] \end{bmatrix} \vec{z} + \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{y}(i) \\ \vec{v}(i) \\ \vec{w}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C][O][O] \\ [O][I][O] \\ [O][O][H] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{v}(i) \\ \vec{s}(i) \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (2.2.2.)$$

Pratiquement, ce ne sont pas les sorties $\vec{y}(i)$ et $\vec{w}(i)$ qui sont utilisées, mais l'écart $\vec{\varepsilon}(i) = \vec{w}(i) - \vec{y}(i)$, soit encore :

$$\vec{\varepsilon}(i) = - [C]\, \vec{x}(i) + [H]\, \vec{s}(i)$$

Il convient donc de souligner dès maintenant que le vecteur de consigne $\vec{z}_R$ correspondant aux sorties figurant dans la représentation d'état globale retenue sera toujours identiquement nul, puisque la commande doit tendre à annuler $\vec{\varepsilon}(i)$ et $\vec{v}(i)$.

En reprenant les notations utilisées dans les expressions (2.1.11.) la représentation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i+1) \\ \vec{s}\ (i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1][H_1] \\ [O\ ][E\ ] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i) \\ \vec{s}\ (i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ [O\ ] \end{bmatrix} \vec{u}(i) + \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ [F]\vec{z} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}(i) \\ \vec{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C'_1], [H_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i) \\ \vec{s}\ (i) \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (2.2.3.)$$

La matrice $[C'_1]$ n'est pas exactement identique à la matrice $[C_1]$ figurant dans les expressions (2.1.11.) et utilisée dans le calcul de la commande comportant une action intégrale.

En effet :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} [C]\ [O] \\ [O]\ [I] \end{bmatrix} \text{ alors que } [C'_1] = \begin{bmatrix} -[C][O] \\ [O][I] \end{bmatrix}$$

..../...

mais cette différence n'est nullement gênante pour la suite des calculs.

$[H_1] = \begin{bmatrix}[O]\\[H]\end{bmatrix}$ est une matrice de dimensions $(n+m) \times \ell$

$[H_2] = \begin{bmatrix}[H]\\[O]\end{bmatrix}$ est une matrice de dimensions $(m+m) \times \ell$

En adoptant une notation condensée, nous avons finalement :

$$\begin{cases} \vec{x}_2(i+1) = [A_2]\,\vec{x}_2(i) + [B_2]\,\vec{u}(i) + \vec{f}_2 \\ \vec{y}_2(i) = [C_2]\,\vec{x}_2(i) \end{cases} \qquad (2.2.4.)$$

$\vec{x}_2(i)$ est le vecteur d'état du système global, de dimension $(n+m+\ell)$

$\vec{y}_2(i)$ est le nouveau vecteur de sortie, de dimension $(m+m)$

$\vec{f}_2$ est un vecteur constant de dimension $(n+m+\ell)$, $\vec{z}$ étant constant $[A_2]$, $[B_2]$ et $[C_2]$ sont les matrices d'état globales, de dimensions respectives $(n+m+\ell) \times (n+m+\ell)$, $(n+m+\ell) \times r$ et $(m+m) \times (n+m+\ell)$.

C'est à partir de ces notations générales, et en fonction de leurs liaisons avec les notations précédemment utilisées, que nous allons développer le calcul d'une nouvelle commande minimisant le critère J_2 défini par :

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{\infty} \{\vec{e}_2(i)^T\,[Q_1]\,\vec{e}_2(i) + \vec{u}(i)^T\,[R]\,\vec{u}(i)\} \qquad (2.2.5.)$$

soit :

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{\infty} \{\vec{\varepsilon}(i)^T\,[Q]\,\vec{\varepsilon}(i) + \vec{v}(i)^T\,[Q_\sigma]\,\vec{v}(i) + \vec{u}(i)^T\,[R]\,\vec{u}(i)\}$$

Le critère J_2 a donc une forme littérale analogue au critère J_1 employé auparavant. Il faut toutefois noter que les écarts et leurs intégrales ne sont plus définis de la même manière.

.../...

2.2.2. Calcul d'une commande multidimensionnelle en asservissement

La forme littérale du système global pour lequel nous désirons déterminer une commande étant identique à celle qui a été employée dans les développements précédents, nous pouvons lui appliquer les résultats déjà obtenus par l'utilisation de la théorie de l'optimalisation quadratique.

Cependant, l'application de cette méthode de calcul nécessite la vérification de certaines hypothèses qu'il convient d'analyser avec soin; Nous avons pour notre part préféré commencer le développement des calculs en supposant que toutes les conditions nécessaires sont remplies. La forme des résultats finalement obtenus permet en effet de justifier à postériori cette démarche de manière plus simple.

2.2.2.1. Expression générale de la structure de commande

D'après les résultats précédemment explicités, la commande optimale $\vec{u}^*(i)$ a pour expression :

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = - [L_2]\, \vec{x}_2(i) + \vec{\mu}_2} \qquad (2.2.6.)$$

La matrice $[L_2]$ et le vecteur $\vec{\mu}_2$ intervenant dans cette formule sont définis par :

$$\boxed{\begin{aligned} [L_2] &= \{[R] + [B_2]^T\, [K_2][B_2]\}^{-1}\ [B_2]^T\, [K_2][A_2] \\ \vec{\mu}_2 &= \{[R] + [B_2]^T\, [K_2][B_2]\}^{-1}\ [B_2]^T\, \{\vec{g}_2 - [K_2]\, \vec{f}_2\} \end{aligned}} \qquad (2.2.7.)$$

$[K_2]$ est une matrice symétrique définie-positive, de dimensions $(n+m+\ell) \times (n+m+\ell)$, solution-limite d'une équation aux différences de type RICCATI calculée en temps inverse à partir de conditions finales nulles :

$$\boxed{\begin{aligned} &[K_2(i)] = [A_2]^T\, [K_2(i+1)][A_2] - [A_2]^T\, [K_2(i+1)][B_2][S_2(i+1)]^{-1} \\ &[B_2]^T\, [K_2(i+1)][A_2] + [C_2]^T\, [Q_1][C_2] \\ &\text{avec } [S_2(i+1)] = [R] + [B_2]^T\, [K_2(i+1)][B_2] \end{aligned}} \qquad (2.2.8.$$

$\vec{g}_2$ est un vecteur de dimension $(n+m+\ell)$, solution-limite d'une équation aux différences de type linéaire calculée en temps inverse à partir de conditions finales nulles :

$$\boxed{\vec{g}_2(i) = \{[A_2] - [B_2][L_2]\}^T\ .\ \{\vec{g}_2(i+1) - [K_2]\, \vec{f}_2\} + [C_2]^T\, [Q_1][\textcircled{H}_a]\, \vec{z}_R} \qquad (2.2.9.)$$

.../...

Rappelons que $[\textcircled{H}_a]$ est simplement une matrice de passage de dimensions (m+m) x m définie par :

$$[\textcircled{H}_a] = \begin{bmatrix} [I] \\ [O] \end{bmatrix}$$ où [I] est la matrice unitaire d'ordre m.

Le vecteur $\vec{z}_R$ représente les consignes des sorties $\vec{\varepsilon}(i)$ figurant dans la représentation d'état choisie. Dans le cas considéré, nous avons ainsi $\vec{z}_R \equiv \vec{o}$.

Ces expressions permettent donc de calculer les différents éléments de la commande, c'est à dire la matrice de "réaction" $[L_2]$, de dimensions r x (n+m+ℓ), et le vecteur de prédiction $\vec{\mu}_2$, de dimension r. Mais en réalité, il est possible d'approfondir le détail des calculs, en décomposant les différentes expressions précédentes pour tenter de faire apparaître les relations pouvant exister avec les éléments de la commande correspondant à un système sans modèle de référence. Encore une fois, il nous semble utile de rappeler que les résultats que nous venons d'énoncer supposent provisoirement vérifiées toutes leurs conditions justificatives d'existence.

2.2.2.2. Etude de la matrice de bouclage

Reprenons l'expression (2.2.7.) définissant la matrice de bouclage $[L_2]$:

$$[L_2] = \{[R] + [B_2]^T [K_2][B_2]\}^{-1} [B_2]^T [K_2][A_2]$$

Décomposons alors la matrice $[K_2]$ selon le schéma ci-après :

$$[K_2] = \begin{bmatrix} \overbrace{[K_{11}]}^{n+m} & \overbrace{[K_{12}]}^{\ell} \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n+m \\ \} \ell \end{matrix}$$

La matrice $[K_2]$ étant symétrique, les matrices $[K_{11}]$ et $[K_{22}]$ le sont également, et $[K_{21}] = [K_{12}]^T$.

Or, avec les mêmes schémas de partitions, les matrices d'état $[A_2]$ et $[B_2]$ s'expriment par :

$$[A_2] = \begin{bmatrix} [A_1] & [H_1] \\ [O] & [E] \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad [B_2] = \begin{bmatrix} [B_1] \\ [O] \end{bmatrix}$$

.../...

Il est par suite immédiat d'aboutir aux expressions suivantes :

$$[B_2]^T [K_2][B_2] = [B_1]^T [K_{11}][B_1]$$

et :

$$[B_2]^T [K_2][A_2] = [[B_1]^T [K_{11}][A_1], [B_1]^T [K_{11}][H_1] + [B_1]^T [K_{12}][E]]$$

(2.2.10.)

Considérons alors l'équation aux différences de RICCATI (2.2.8.)

$$[K_2(i)] = [A_2]^T [K_2(i+1)] [A_2] - [A_2]^T [K_2(i+1)][B_2][S_2(i+1)]^{-1}$$

$$[B_2]^T [K_2(i+1)][A_2] + [C_2]^T [Q_1][C_2]$$

avec $[S_2(i+1)] = [R] + [B_2]^T [K_2(i+1)][B_2]$

En utilisant toujours les mêmes décompositions, et en ne répétant pas l'indice temporel "(i+1)" pour alléger les notations, le premier terme du second membre peut s'écrire :

$$\left[\begin{array}{c|c} [A_1]^T [K_{11}][A_1] & [A_1]^T [K_{11}][H_1] + [A_1]^T [K_{12}][E] \\ \hline * & \{[H_1]^T [K_{11}] + [E]^T [K_{21}]\}[H_1] + \{[H_1]^T [K_{12}] + [E]^T [K_{22}]\}[E] \end{array}\right]$$

Il n'est pas nécessaire d'expliciter l'élément devant figurer dans le quartier inférieur gauche de cette matrice puisqu'elle est symétrique.

De la même façon, le deuxième terme du second membre, également symétrique, a pour expression développée :

$$\left[\begin{array}{c|c} [A_1]^T [K_{11}][B_1][S_2]^{-1} [B_1]^T [K_{11}][A_1] & [A_1]^T [K_{11}][B_1][S_2]^{-1}[B_1]^T \{[K_{11}][H_1] + [K_{12}][E]\} \\ \hline * & \{[H_1]^T [K_{11}] + [E]^T [K_{21}][B_1][S_2]^{-1} \\ & [B_1]^T \{[K_{11}][H_1] + [K_{12}][E]\} \end{array}\right]$$

avec $[S_2] = [R] + [B_1]^T [K_{11}][B_1]$

.../...

Enfin, le troisième et dernier terme du second membre se décompose sous la forme symétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} [C'_1]^T [Q_1][C'_1] & [C'_1]^T [Q_1][H_2] \\ * & [H_2]^T [Q_1][H_2] \end{bmatrix}$$

D'après les formes respectives des matrices $[C'_1]$ et $[C_1]$ et la constitution de la matrice $[H_2]$, il est très facile de montrer que ce terme peut aussi s'écrire :

$$\begin{bmatrix} [C_1]^T [Q_1][C_1] & [C'_1]^T [Q_1][H_2] \\ * & [H_2]^T [Q_1][H_2] \end{bmatrix}$$

Par suite, l'équation aux différences de type RICCATI (2.2.8.) peut être décomposée en trois équations aux différences partielles :

1ère équation :

$$[K_{11}(i)] = [A_1]^T [K_{11}(i+1)][A_1] - [A_1]^T [K_{11}(i+1)][B_1][S_2(i+1)]^{-1} [B_1]^T [K_{11}(i+1)][A_1] + [C_1]^T [Q_1][C_1] \qquad (2.2.11.)$$

avec $[S_2(i+1)] = [R] + [B_1]^T [K_{11}(i+1)][B_1]$

2e équation :

$$[K_{12}(i)] = [A_1]^T [K_{11}(i+1)][H_1] + [A_1]^T [K_{12}(i+1)][E] + [C'_1]^T [Q_1][H_2] - [A_1]^T [K_{11}(i+1)][B_1][S_2(i+1)]^{-1} [B_1]^T \{[K_{11}(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)][E]\} \qquad (2.2.12.)$$

3e équation :

$$[K_{22}(i)] = \{[H_1]^T [K_{11}(i+1)] + [E]^T [K_{21}(i+1)]\} [H_1] + \{[H_1]^T [K_{12}(i+1)] + [E]^T [K_{22}(i+1)]\}[E] - \{[H_1]^T [K_{11}(i+1)] + [E]^T [K_{21}(i+1)]\}[B_1][S_2(i+1)]^{-1} [B_1]^T \{[K_{11}(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)] [E]\} + [H_2]^T [Q_1][H_2] \qquad (2.2.13.)$$

.../...

A l'examen, il apparaît que la matrice $[K_{22}]$ définie par la troisième équation (2.2.13.) n'intervient par ailleurs ni dans les deux premières équations, ni dans l'expression de la matrice de bouclage $[L_2]$. Il est par conséquent inutile de calculer cette dernière équation aux différences (2.2.13.) pour obtenir $[L_2]$.

En comparant la première équation aux différences (2.2.11.) avec l'équation aux différences de type RICCATI (2.1.15.) obtenue pour un système sans modèle de référence, il est facile de constater que les deux formes sont absolument identiques. Si le critère J_2 comporte les mêmes matrices de pondération que le critère J_1, la matrice $[K_{11}]$ est donc identique à la matrice $[K_1]$ définie pour la commande du système sans modèle de référence.

D'après les expressions (2.2.9.) et (2.2.10.) la matrice $[L_2]$ peut ainsi se mettre sous la forme :

$$[L_2] = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} \left[[B_1]^T [K_1][A_1] \, , \, [B_1]^T [K_1][H_1] + [B_1]^T [K_{12}][E]\right] \qquad (2.2.14.)$$

c'est à dire encore :

$$\boxed{[L_2] = [[L_1] \, , \, [P_1]]}$$

où $[L_1]$ est la matrice de bouclage obtenue en l'absence du modèle de référence, et $[P_1]$ une matrice de dimensions (rxℓ) définie par :

$$\boxed{[P_1] = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[K_1][H_1] + [K_{12}][E]\}} \qquad (2.2.15.)$$

2.2.2.3. Etude du vecteur d'anticipation

Le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_2$ est défini par l'expression (2.2.7.) vue précédemment :

$$\vec{\mu}_2 = \{[R] + [B_2]^T [K_2][B_2]\}^{-1} [B_2]^T \{\vec{g}_2 - [K_2] \vec{f}_2\}$$

c'est à dire encore, en posant $\vec{h}_2 = \vec{g}_2 - [K_2] \vec{f}_2$:

$$\vec{\mu}_2 = \{[R] + [B_2]^T [K_2][B_2]^{-1} [B_2]^T \vec{h}_2\} \qquad (2.2.16.)$$

.../...

D'après (2.2.9.), le vecteur $\vec{h}_2$ est alors la solution limite d'une équation aux différences de type linéaire :

$$\vec{h}_2(i) = \{[A_2] - [B_2][L_2]\}^T \vec{h}_2(i+1) - [K_2]\vec{f}_2 + [C_2]^T [Q_1][\oplus_a]\vec{z}_R \qquad (2.2.17.)$$

Le vecteur $\vec{z}_R$, qui représente les valeurs désirées pour le vecteur des écarts $\vec{\varepsilon}(i)$, est identiquement nul. Décomposons alors $\vec{h}_2$ en deux éléments $\vec{h}_{21}$ et $\vec{h}_{22}$ respectivement de dimensions (n+m) et ℓ :

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} \vec{h}_{21} \\ \vec{h}_{22} \end{bmatrix}$$

Avec ce schéma de partition, le vecteur $\vec{f}_2$ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ [F]\vec{z} \end{bmatrix}$$

En supposant que $\vec{f}$ est nul, c'est à dire qu'il n'y a pas de perturbations mesurables sur le vecteur d'état du procédé, le vecteur $\vec{f}_1$ s'annule également, et l'expression de $\vec{f}_2$ devient :

$$\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ [F] \end{bmatrix}\vec{z}$$

et, par suite :

$$[K_2]\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} [K_{12}] \\ [K_{22}] \end{bmatrix} . [F]\vec{z}$$

Par ailleurs, il est immédiat d'écrire :

$$[A_2] - [B_2][L_2] = \begin{bmatrix} [A_1] - [B_1][L_1] & [H_1] - [B_1][P_1] \\ [O] & [E] \end{bmatrix}$$

C'est à dire encore :

$$\{[A_2] - [B_2][L_2]\}^T = \begin{bmatrix} \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T & [O] \\ \{[H_1] - [B_1][P_1]\}^T & [E]^T \end{bmatrix}$$

.../...

L'équation aux différences (2.2.17.) peut alors être décomposée en deux expressions :

1ère équation :

$$\vec{h}_{21}(i) = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \vec{h}_{21}(i+1) - [K_{12}][F]\vec{z} \qquad (2.2.18.)$$

2e équation :

$$\vec{h}_{22}(i) = \{[H_1] - [B_1][P_1]^T\} \vec{h}_{21}(i+1) + [E]^T \vec{h}_{22}(i+1) - [K_{22}][F] \vec{z} \qquad (2.2.19.)$$

Or, le vecteur $\vec{\mu}_2$ peut aussi s'écrire, d'après (2.2.16.) :

$$\vec{\mu}_2 = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1}[B_1]^T \vec{h}_{12}$$

Il apparaît que le vecteur $\vec{h}_{22}$ n'intervient ni dans l'équation permettant le calcul de $\vec{h}_{21}$, ni dans l'expression du vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_2$. Il est donc inutile de conserver l'équation aux différences (2.2.19.)

D'après la récurrence (2.2.18.), la solution-limite $\vec{h}_{21}$ doit vérifier :

$$\vec{h}_{21} = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \vec{h}_{21} - [K_{12}][F] \vec{z}$$

soit encore :

$$\{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\} \cdot \vec{h}_{21} = - [K_{12}][F] \vec{z}$$

Nous avons déjà montré au § 2.1.2.2. que la matrice $\{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}$ est régulière. Nous avons donc :

$$\vec{h}_{21} = - \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} \cdot [K_{12}][F] \vec{z}$$

Le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_2$ a donc finalement pour expression :

$$\vec{\mu}_2 = -\{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} [K_{12}][F] \vec{z} \qquad (2.2.20.)$$

où [I] est la matrice unitaire d'ordre (n+m)

.../...

Nous constatons que la matrice $[K_{22}]$, dont le calcul est inutile pour la détermination de la matrice $[L_2]$ n'intervient pas non plus dans la formule algébrique définissant le vecteur $\vec{\mu}_2$. Par conséquent, il suffit de calculer les éléments $[K_{11}]$ (c'est à dire en fait $[K_1]$) et $[K_{12}]$de la matrice globale $[K_2]$.

2.2.3. Analyse de la solution proposée

Tel que nous venons de le présenter, le calcul d'une commande multidimensionnelle en asservissement a l'avantage d'inclure directement les intégrateurs dans la structure globale. Pour les applications industrielles, l'assurance d'erreurs stationnaires nulles entre les consignes et les valeurs moyennes des sorties correspondantes apparaît être en effet indispensable dans la grande majorité des cas. Il est par conséquent logique de développer les calculs à partir d'un système initial comportant déjà les intégrateurs appropriés.

Avant de justifier a posteriori la validité des résultats obtenus, il nous semble utile de les résumér aussi synthétiquement que possible en rappelant le mode de calcul des différents éléments de la structure de commande proposée.

2.2.3.1. Calcul des différents éléments

La commande multidimensionnelle en asservissement a pour expression :

$$\vec{u}^*(i) = - [L_1]\vec{x}_1(i) - [P_1]\vec{s}(i) + \vec{\mu}_2$$

soit encore :

$$\vec{u}^*(i) = - [L]\,\vec{x}(i) - [M]\,\vec{v}(i) - [P_1]\vec{s}(i) + [N]\,\vec{z}$$

Cependant, pour mieux mettre en évidence que le terme " $-[P_1]\vec{s}(i)$" n'est pas en fait un élément de réaction, mais une action prédictive, nous préférons le conserver avec un signe positif en posant $[P] = -[P_1]$. La forme générale finalement retenue est donc la suivante :

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = - [L]\vec{x}(i) - [M]\vec{v}(i) + [P]\vec{s}(i) + [N]\vec{z}} \qquad (2.2.21.)$$

où $\vec{x}(i)$ est le vecteur d'état du système, de dimension n,

$\vec{s}(i)$ est le vecteur d'état du modèle de référence, de dimension ℓ,

$\vec{v}(i)$ est le vecteur de sortie des intégrateurs, de dimension m,

$\vec{z}$ est le vecteur des consignes, de dimension m.

.../...

Les matrices [L] et [M], regroupées dans la matrice $[L_1] = [[L], [M]]$, sont définies de la même manière qu'en l'absence du modèle de référence, par l'expression :

$$[L_1] = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T [K_1][A_1] \qquad (2.2.22.)$$

où $[K_1]$ est la matrice de dimensions (n+m) x (n+m) obtenue en calculant en temps inverse une équation aux différences de type RICCATI, à partir de conditions finales nulles :

$$[K_1(i)] = [A_1]^T [K_1(i+1)][A_1] - [A_1]^T [K_1(i+1)][B_1][S_1(i+1)]^{-1} [B_1]^T [K_1(i+1)][A_1] + [C_1]^T [Q_1][C_1] \qquad (2.2.23.)$$

avec $[S_1(i+1)] = [R] + [B_1]^T [K_1(i+1)][B_1]$

La matrice [P] est définie par :

$$[P] = -\{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[K_1][H_1] + [K_{12}][E]\} \qquad (2.2.24.)$$

où $[K_{12}]$ est la matrice de dimensions (n+m) x ℓ obtenue en calculant en temps inverse à partir de conditions finales nulles l'équation aux différences :

$$[K_{12}(i)] = [A_1]^T \{[K_1(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)][E]\} + [C'_1]^T [Q_1][H_2] - [A_1]^T [K_1(i+1)][B_1][S_1(i+1)]^{-1} [B_1]^T \{[K_1(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)][E]\} \qquad (2.2.25.)$$

Enfin, la matrice [N] est donnée par la formule algébrique :

$$[N] = -\{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} [K_{12}][F] \qquad (2.2.26.)$$

.../...

dans laquelle [I] représente la matrice unitaire d'ordre (n+m).

Il convient de remarquer que cette matrice [N] n'a pas la même expression que dans le cas où la structure ne comporte pas de modèle de référence, bien que nous conservions la même notation.

Le schéma général de l'ensemble de commande ainsi défini est illustré par la figure 2.2.3.

Par ailleurs, il faut noter que la structure de l'estimateur n'est pas modifiée par l'introduction du modèle de référence, le vecteur d'état supplémentaire $\vec{s}(i)$ étant évidemment toujours directement accessible.

2.2.3.2. *Conditions d'existence*

L'équation aux différences de type RICCATI définissant la matrice $[K_2]$ converge vers une solution-limite unique si le système global est complètement commandable (Cf. § 2.1.1.2.).

Les matrices de pondération du critère [R] et $[Q_1]$ vérifiant les conditions imposées, la commande correspondante, est alors stable.

Or, le système complet considéré, incluant le modèle de référence, n'est pas commandable puisque les variables d'état $\vec{s}(i)$ ne dépendent pas des variables d'action $\vec{u}(i)$ du système. Nous avons vu cependant que le calcul de la commande globale peut être décomposé en deux parties. Les matrices de bouclage [L] et [M] étant indépendantes des autres éléments de la commande et demeurant les mêmes qu'en l'absence du modèle de référence, leur calcul demeure bien sûr tributaire uniquement de la commandabilité du système initial muni de ses intégrateurs. L'existence et la stabilité de la commande en réaction ne sont donc pas modifiées par l'adjonction du modèle de référence.

Il reste à étudier les conditions de détermination des matrices [P] et [N]. Ces deux éléments, constituant la partie anticipative de la commande, ne peuvent altérer la stabilité du système.

Il suffit par conséquent de montrer l'existence et l'unicité de la solution-limite $[K_{12}]$ qui intervient dans leurs définitions.

Rappelons l'équation aux différences (2.2.25.) conduisant à la matrice $[K_{12}]$:

$$[K_{12}(i)] = [A_1]^T \{[K_1(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)][E]\} + [C'_1]^T [Q_1][H_2]$$

$$-[A_1]^T [K_1(i+1)][B_1][S_1(i+1)]^{-1} [B_1]^T \{[K_1(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)][E]\}$$

.../...

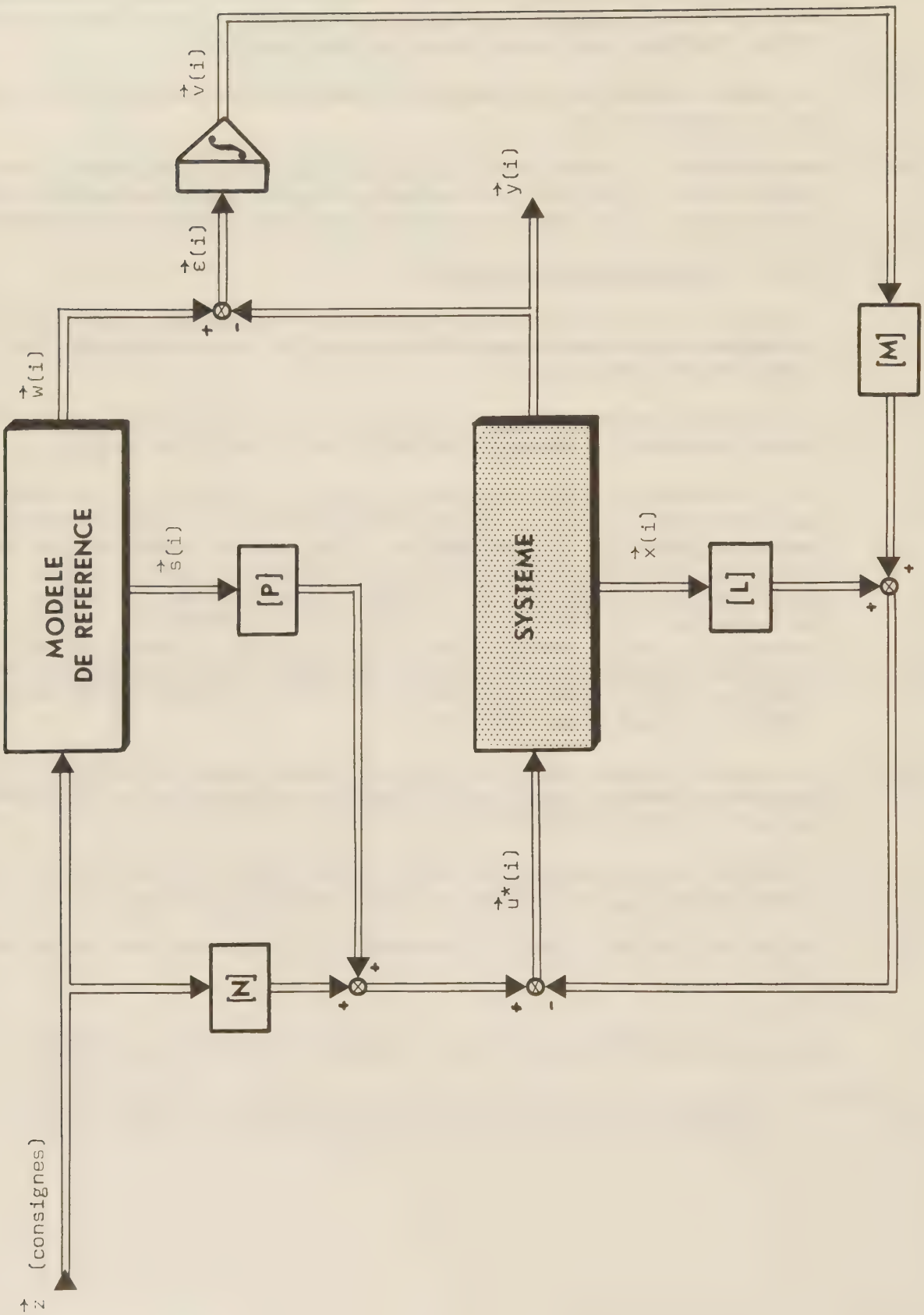


Figure 2.2.3. - SCHEMA DE LA COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE EN ASSERVISSEMENT

soit encore, en faisant apparaître la matrice $[L_1(i+1)]$ dont $[L_1]$ est la valeur limite :

$$[K_{12}(i)] = \{[A_1] - [B_1][L_1(i+1)]\}^T\{[K_1(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)][E]\} + [C'_1]^T [Q_1][H_2]$$

(2.2.27.)

Cette équation aux différences n'est pas de type RICCATI, mais s'apparente à une forme linéaire à coefficients variables.

Les matrices $[L_1(i+1)]$ et $[K_1(i+1)]$ tendent vers des valeurs limites $[L_1]$ et $[K_1]$. De plus, les matrices $\{[A_1] - [B_1][L_1]\}$ et $[E]$ ont toutes leurs valeurs propres de modules inférieurs à l'unité, puisqu' elles caractérisent deux systèmes stables. Il en est donc aussi de même pour la matrice $\{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T$, et l'équation aux différences (2.2.27.) est bien convergente.

La solution-limite $[K_{12}]$ doit vérifier l'équation algébrique :

$$[K_{12}] = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T [K_{12}][E] + \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T [K_1][H_1] + [C'_1]^T [Q_1][H_2]$$

(2.2.28.)

Il est intéressant de noter que cette solution-limite est indépendante de la façon dont $[K_1(i)]$ converge vers $[K_1]$. Nous avons en effet démontré par ailleurs (Cf. Annexe) le théorème suivant :

Théorème :

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation matricielle $[X] - [\phi][X][\psi]=[\Omega]$ *admette une solution* $[X]$ *unique est qu'aucune des valeurs propres de la matrice* $[\Phi]$ *ne soit égale à l'inverse d'une valeur propre de la matrice* $[\psi]$.

Cette condition est évidemment vérifiée pour l'équation (2.2.28.) puique $[\Phi]$ et$[\psi]$ ont toutes leurs valeurs propres inférieures à l'unité en modules.

Le calcul de l'équation aux différences (2.2.25.) déterminant $[K_{12}]$ peut donc s'effectuer soit en simultanéité avec l'équation aux différences (2.2.23.) conduisant à $[K_1]$, soit ultérieurement en utilisant directement cette valeur-limite $[K_1]$, soit de toute autre manière jugée préférable.

.../...

2.3. COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES

Il arrive fréquemment qu'un modèle dynamique général représentant un système comporte un nombre d'entrées supérieur au nombre d'actions pratiquement utilisées pour assurer la commande des sorties. Les entrées mesurables "supplémentaires", c'est à dire non incluses dans le vecteur d'action, sont généralement ignorées pour le calcul de la structure de commande. Or, il apparaît à la réflexion dommage de négliger ainsi une partie peut-être importante des informations caractérisant l'évolution du procédé.

Il semble donc souhaitable de prendre en compte ces grandeurs pour améliorer les performances de la commande, grandeurs qui peuvent être considérées comme des perturbations mesurables vis-à-vis de l'ensemble de commande précédemment défini.

2.3.1. Prise en compte des perturbations mesurables

La prise en compte de ces perturbations mesurables se traduit par un élargissement du modèle dynamique initialement considéré, afin de représenter les liaisons existant entre ces grandeurs et les sorties du système.

Comme précédemment, nous justifierons à posteriori la validité des résultats obtenus.

2.3.1.1. Calcul de la commande

Nous supposons que le système initial peut être représenté par les équations d'état discrètes :

$$\begin{cases} \vec{x}(i+1) = [A]\vec{x}(i) + [B]\vec{u}(i) + \vec{f} \\ \vec{y}(i) = [C]\vec{x}(i) \end{cases} \qquad (2.3.1.)$$

où $\vec{x}(i)$ est un vecteur d'état de dimension n.

Le vecteur des perturbations mesurables $\vec{\pi}$, de dimension r_4, a sur le vecteur de sortie une influence que notons $\vec{y}_4(i)$, caractérisée par la représentation d'état discrète. :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\zeta}(i+1) = [A_4]\ \vec{\zeta}(i) + [B_4]\vec{\pi} \\ \vec{y}_4(i) = [C_4]\ \vec{x}_4(i) \end{cases}} \qquad (2.3.2.)$$

où $\vec{\zeta}(i)$ est un vecteur d'état de dimension n_4.

Le système ainsi défini est supposé stable.

.../...

En regroupant les équations d'état (2.3.1.) et (2.3.2.), le système global peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \vec{x}(i+1) \\ \vec{\zeta}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_3] & [O] \\ [O] & [A_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{\zeta}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] \\ [O] \end{bmatrix} \vec{u}(i) + \begin{bmatrix} \vec{f} \\ [B_4]\vec{\pi} \end{bmatrix} ,$$

le vecteur de sortie étant égal à $[C]\vec{x}(i) + [C_4]\vec{\zeta}(i)$.

En adoptant une représentation condensée, cette forme générale devient :

$$\begin{cases} \vec{x}_5(i+1) = [A_5]\vec{x}_5(i) + [B_5]\vec{u}(i) + \vec{f}_5 \\ \vec{y}_5(i) = [[C] , [C_4]]\ \vec{x}_5(i) = [C_5]\vec{x}_5(i) \end{cases} \qquad (2.3.3.)$$

$\vec{x}_5(i)$ est le vecteur d'état global, de dimension $(n+n_4)$

$\vec{u}(i)$ est le vecteur d'entrée, de dimension r.

$\vec{y}_5(i)$ est le vecteur de sortie, de dimension m.

$\vec{f}_5$ est un vecteur constant, de dimension $(n+n_4)$

$[A_5]$, $[B_5]$ et $[C_5]$ sont trois matrices constantes, de dimensions respectives $(n+n_4) \times (n+n_4)$, $(n+n_4) \times r$ et $m \times (n+n_4)$

Il convient de remarquer que la méthode de calcul basée sur l'optimalisation quadratique suppose le vecteur des perturbations mesurables $\vec{\pi}$ théoriquement constant, et donc en pratique lentement variable devant la dynamique générale du système. La même condition a d'ailleurs déjà été rencontrée pour le vecteur des consignes $\vec{z}$.

Il faut noter aussi que la structure du critère de pénalisation n'est pas modifiée par la prise en compte des perturbations mesurables.

La commande optimale correspondant au système global considéré a pour expression :

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = - [L_5]\ \vec{x}_5(i) + \vec{\mu}_5} \qquad (2.3.4.)$$

La matrice $[L_5]$ et le vecteur $\vec{\mu}_5$ sont définis par les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} [L_5] &= \{[R] + [B_5]^T\ [K_5][B_5]\}^{-1}\ [B_5][K_5][A_5] \\ \vec{\mu}_5 &= \{[R] + [B_5]^T\ [K_5][B_5]\}^{-1}\ [B_5]^T\ \{\vec{g}_5 - [K_5]\ \vec{f}_5\} \end{aligned}} \qquad (2.3.5.)$$

.../...

$[K_5]$ est une matrice de dimensions $(n+n_4) \times (n+n_4)$, symétrique et définie-positive, obtenue comme solution-limite d'une équation aux différences de type RICCATI calculée en temps inverse à partir de conditions finales nulles :

$$[K_5(i)] = [A_5]^T [K_5(i+1)][A_5] - [A_5]^T [K_5(i+1)][B_5][S_5(i+1)]^{-1} [B_5]^T [K_5(i+1)][A_5] + [C_5]^T [Q][C_5]$$

$$\text{avec } [S_5(i+1)] = [R] + [B_5]^T [K_5(i+1)][B_5] \qquad (2.3.6.)$$

$\vec{g}_5$ est un vecteur de dimension $(n+n_4)$, solution-limite d'une équation aux différences de type linéaire calculée dans les mêmes conditions que la précédente :

$$\vec{g}_5(i) = \{[A_5] - [B_5][L_5]\}^T \{\vec{g}_5(i+1) - [K_5]\vec{f}_5\} + [C_5]^T [Q]\vec{z} \qquad (2.3.7.)$$

où $\vec{z}$ est le vecteur-consigne des sorties $\vec{y}_5(i)$

2.3.1.2. Etude de la matrice de bouclage

Décomposons la matrice $[K_5(i)]$ de la manière suivante :

$$[K_5(i)] = \begin{bmatrix} [K_{51}(i)] & [K_{52}(i)] \\ [K_{53}(i)] & [K_{54}(i)] \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} n_4 \end{matrix}$$

$\quad\quad\quad

2e équation

$$[K_{52}(i)] = [A]^T [K_{52}(i+1)][A_4] - [A]^T [K_{51}(i+1)][B][S(i+1)]^{-1} [B]^T [K_{52}(i+1)][A_4] + [C]^T [Q][C_4] \qquad (2.3.9.)$$

3e équation

$$[K_{54}(i)] = [A_4]^T [K_{54}(i+1)][A_4] - [A_4]^T [K_{53}(i+1)][B][S(i+1)]^{-1} [B]^T [K_{52}(i+1)][A_4] + [C_4]^T [Q][C_4] \qquad (2.3.10.)$$

L'expression définissant la matrice $[L_5]$ est alors :

$$[L_5] = \{[R] + [B]^T [K_{51}][B]\}^{-1} [B]^T [[K_{51}][A], [K_{52}][A_4]] \qquad (2.3.11.)$$

La matrice $[K_{54}]$ n'intervient ni dans la définition de $[L_5]$, ni dans les deux premières équations recurrentes partielles. Il est donc inutile, pour le calcul de la matrice $[L_5]$, d'intégrer la troisième équation partielle (2.3.10.)

Par ailleurs, il apparaît clairement par l'équation (2.3.8.) que la matrice $[K_{51}]$ est identique à la matrice [K] qui serait obtenue si les perturbations mesurables n'étaient pas incluses dans le modèle. D'après l'expression (2.3.11.), la matrice $[L_5]$peut donc se décomposer en :

$$\boxed{[L_5] = [[L] , [T]]} \qquad (2.3.12.)$$

La prise en compte des perturbations mesurables ne modifie donc pas la matrice de bouclage relative au vecteur d'état initial du système. Elle est complétée par une matrice de commande [T] relative au vecteur d'état $\vec{\zeta}(i)$ caractérisant le modèle dynamique des perturbations mesurables.

[T] est une matrice de dimensions $(r \times n_4)$ définie par :

$$\boxed{[T] = \{[R] + [B]^T [K][B]\}^{-1} [B]^T [K_{52}][A_4]} \qquad (2.3.13.)$$

.../...

$[K_{52}]$ est la solution-limite obtenue en intégrant en temps inverse, à partir de conditions finales nulles, une équation aux différences s'apparentant à une forme linéaire à coefficients variables :

$$[K_{52}(i)] = [A]^T [K_{52}(i+1)][A_4] - [A]^T [K(i+1)][B][S(i+1)]^{-1} [B]^T [K_{52}(i+1)][A_4] + [C]^T [Q][C_4]$$

soit encore :

$$\boxed{[K_{52}(i)] = \{[A] - [B][L(i+1)]\}^T [K_{52}(i+1)][A_4] + [C]^T [Q][C_4]} \qquad (2.3.14.)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, les conditions de validité de ces résultats seront examinées ultérieurement.

2.3.1.3. *Etude du vecteur d'anticipation*

D'après les calculs précédents, le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_5$ défini par l'expression (2.3.5.) peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\mu}_5 = \{[R] + [B]^T [K][B]\}^{-1} [B_5]^T \{\vec{g}_5 - [K_5] \vec{f}_5\}$$

soit , en posant $\vec{h}_5 = \vec{g}_5 - [K_5]\vec{f}_5$:

$$\vec{\mu}_5 = \{[R] + [B]^T [K][B]\}^{-1} [B_5]^T \vec{h}_5 \qquad (2.3.15.)$$

Décomposons alors $\vec{h}_5$ en deux vecteurs $\vec{h}_{51}$ et $\vec{h}_{54}$, de dimensions respectives n et n_4. Comme $[B_5]^T = [[B]^T , [O]]$, l'expression (2.3.15.) s'écrit finalement en fonction de $\vec{h}_{51}$ seulement :

$$\vec{\mu}_5 = \{[R] + [B]^T [K][B]\}^{-1} [B]^T \vec{h}_{51} \qquad (2.3.16.)$$

L'équation algébrique déduite de la forme reccurente (2.3.7.) pour définir la solution-limite $\vec{g}_5$ permet d'écrire :

$$\vec{h}_5 = \{[A_5] - [B_5][L_5]\}^T \vec{h}_5 + [C_5]^T [Q] \vec{z} - [K_5] \vec{f}_5 \qquad (2.3.17.)$$

$$\text{Or } [A_5] - [B_5][L_5] = \left[\begin{array}{c|c} [A] - [B][L] & -[B][T] \\ \hline [O] & [A_4] \end{array}\right]$$

.../...

$$\text{et } [K_5]\,\vec{f}_5 = \begin{bmatrix} [K]\,\vec{f} + [K_{52}][B_4]\,\vec{\pi} \\ [K_{53}]\vec{f} + [K_{54}][B_4]\,\vec{\pi} \end{bmatrix}$$

En décomposant l'équation (2.3.17.) en deux équations partielles, il est alors facile de montrer que le vecteur $\vec{h}_{51}$ est défini de manière indépendante du vecteur $\vec{h}_{54}$. Comme $\vec{h}_{54}$ n'apparaît pas non plus dans l'expression de $\vec{\mu}_5$, il suffit donc de conserver l'équation algébrique permettant de déterminer $\vec{h}_{51}$:

$$\vec{h}_{51} = \{[A] - [B]\,[L]\}^T\ \vec{h}_{51} + [C]^T\,[Q]\,\vec{z} - [K]\,\vec{f} - [K_{52}][B_4]\,\vec{\pi}$$

La matrice $\{[I] - \{[A] - [B][L]\}^T\}$ étant régulière pour des raisons que nous avons déjà explicitées, le vecteur $\vec{h}_{51}$ s'écrit finalement :

$$\vec{h}_{51} = \{[I] - \{[A] - [B][L]\}^T\}^{-1}.\ \{[C]^T\,[Q]\,\vec{z} - [K]\,\vec{f} - [K_{52}][B_4]\,\vec{\pi}\}$$

Posons alors :

$$\vec{h}_{51} = \vec{h} + \vec{h}_4$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{h} = \{[I] - \{[A] - [B][L]\}^T\}^{-1}.\ \{[C]^T\,[Q]\,\vec{z} - [K]\,\vec{f}\} \\ \vec{h}_4 = -\{[I] - \{[A] - [B][L]\}^T\}^{-1}\,[K_{52}][B_4]\,\vec{\pi} \end{cases} \qquad (2.3.18.)$$

Par suite, le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_5$ peut être mis sous la forme :

$$\vec{\mu}_5 = \vec{\mu} + \vec{\mu}_4$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{\mu} = \{[R] + [B]^T\,[K][B]\}^{-1}\,[B]^T\,\vec{h} \\ \vec{\mu}_4 = \{[R] + [B]^T\,[K][B]\}^{-1}\,[B]^T\,\vec{h}_4 \end{cases} \qquad (2.3.19.)$$

Il est facile de constater que le vecteur $\vec{\mu}$ est exactement le vecteur d'anticipation obtenu pour le système initial seul, sans tenir compte des perturbations mesurables.

.../...

Le vecteur d'anticipation initial n'est donc pas modifié par la prise en compte des perturbations mesurables. Il apparaît dans la commande un nouveau terme prédictif $-[W]\vec{\pi}$, dont la matrice [W] a pour expression :

$$[W] = \{[R] + [B]^T [K][B]\}^{-1} [B]^T \{[I] - \{[A] - [B][L]\}^T\}^{-1} [K_{52}][B_4] \qquad (2.3.20.)$$

où [I] est la matrice unitaire d'ordre n.

Nous avons volontairement choisi de faire intervenir le terme correspondant à cette action anticipative supplémentaire avec un signe négatif, pour souligner qu'il s'agit en fait d'un élément de compensation.

2.3.1.4. Conditions de validité

La commande finalement calculée a pour expression :

$$\vec{u}^*(i) = -[L]\vec{x}(i) + \vec{\mu} - [T]\vec{\zeta}(i) - [W]\vec{\pi} \qquad (2.3.21.)$$

Nous avons déjà indiqué que la méthode de calcul employée nécessite que le système global soit complètement commandable. Or, il est évident que le vecteur d'état supplémentaire $\vec{\zeta}(i)$ n'est pas commandable par les actions $\vec{u}(i)$.

Mais, comme pour le cas du modèle de référence, la décomposition des calculs dont nous nous sommes servi permet de résoudre assez simplement le problème de la validité des résultats.

En effet, la commande initiale n'étant en rien modifiée par la prise en compte des perturbations mesurables, mais seulement complétée, les conditions de détermination des éléments [L] et $\vec{\mu}$ demeurent les mêmes qu'auparavant, ainsi que les conditions de stabilité du système bouclé. Les termes de complément $-[T]\vec{\zeta}(i)$ et $-[W]\vec{\pi}$ constituant une action en boucle ouverte sur le système initial, il suffit donc finalement d'étudier les conditions d'existence et d'unicité des matrices [T] et [W], c'est à dire en fait de la matrice $[K_{52}]$.

Or la matrice $[K_{52}]$ est la solution-limite de l'équation recurrente (2.3.14.) que nous rappelons :

$$[K_{52}(i)] = \{[A] - [B][L(i+1)]\}^T [K_{52}(i+1)][A_4] + [C]^T [Q][C_4]$$

Puisque [L(i+1)] tend vers sa valeur limite [L] et que les deux matrices $\{[A] - [B][L]\}$ et $[A_4]$ ont toutes leurs valeurs propres inférieures à l'unité (car elles caractérisent deux systèmes stables) l'équation recurrente est bien convergente.

.../...

Le théorème démontré en Annexe assure que la solution-limite $[K_{52}]$ est unique quelle que soit la façon dont $[L(i)]$ tend vers $[L]$, ce qui laisse différentes possibilités pour l'intégration de l'équation recurrente considérée.

2.3.2. Calcul unitaire pour le problème global

Nous venons de montrer que la prise en compte des perturbations mesurables ne fait qu'ajouter de nouveaux termes dans l'expression de la commande, sans modifier les termes calculés pour le système initial seul. Cependant, il est généralement nécessaire d'adjoindre également au système initial les intégrateurs appropriés, et éventuellement un modèle de référence pour réaliser les changements de consignes dans de bonnes conditions. Il semble donc intéressant de déterminer finalement comment peut se décomposer le calcul de la commande en fonction des trois sous-ensembles composant le système global : le procédé de base (supposé maintenant muni de ses intégrateurs), le modèle de référence, et le système représentant l'influence des perturbations mesurables.

2.3.2.1. Calcul de la commande

L'écart $\vec{\varepsilon}(i)$ entre le vecteur de sortie $\vec{w}(i)$ du modèle de référence et le vecteur des mesures $\vec{y}_6(i)$ a pour expression :

$$\vec{\varepsilon}(i) = [H]\,\vec{s}(i) - [C]\,\vec{x}(i) - [C_4]\,\vec{\zeta}(i)$$

et les intégrateurs réalisent donc, avec la forme adoptée :

$$\vec{v}(i+1) = \vec{v}(i) + [H]\,\vec{s}(i) - [C]\,\vec{x}(i) - [C_4]\vec{\zeta}(i)$$

Par suite, la représentation globale du système peut se mettre sous la forme suivante, en conservant les notations précédemment employées :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{x}(i+1) \\ \vec{v}(i+1) \\ \vec{s}(i+1) \\ \vec{\zeta}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] & [0] \\ -[C] & [I] & [H] & -[C_4] \\ [0] & [0] & [E] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [A_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{v}(i) \\ \vec{s}(i) \\ \vec{\zeta}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \vec{u}(i) + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ [F]\vec{z} \\ [B_4]\vec{\pi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}(i) \\ \vec{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[C] & [0] & [H] & -[C_4] \\ [0] & [I] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{v}(i) \\ \vec{s}(i) \\ \vec{\zeta}(i) \end{bmatrix} \end{cases}$$

.../...

soit encore, en regroupant le procédé initial et ses intégrateurs :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i+1) \\ \vec{s}(i+1) \\ \vec{\zeta}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] & [H_1] & [\Gamma_1] \\ [O] & [E] & [O] \\ [O] & [O] & [A_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i) \\ \vec{s}(i) \\ \vec{\zeta}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ [O] \\ [O] \end{bmatrix} \vec{u}(i) + \begin{bmatrix} \vec{O} \\ [F]\vec{z} \\ [B_4]\vec{\pi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}(i) \\ \vec{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C'_1] , [H_2] , [\Gamma_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i) \\ \vec{s}(i) \\ \vec{\zeta}(i) \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (2.3.22.)$$

Rappelons que $\vec{x}_1$ est le vecteur d'état de dimension (n+m) correspondant au procédé initial muni de ses intégrateurs, $\vec{s}$ le vecteur d'état de dimension ℓ du modèle de référence et $\vec{\zeta}$ le vecteur d'état de dimension n_4 caractérisant l'influence des perturbations mesurables.

Les matrices $[A_1]$, $[B_1]$, $[C'_1]$, $[H_1]$ et $[H_2]$ ont déjà été définies au § 2.2.1.3.

$[\Gamma_1]$ est une matrice de dimensions (n+m) x n_4 ayant pour expression :

$$[\Gamma_1] = \begin{bmatrix} [O] \\ -[C_4] \end{bmatrix}$$

$[\Gamma_2]$ est une matrice de dimensions (m+m) x n_4 définie par :

$$[\Gamma_2] = \begin{bmatrix} -[C_4] \\ [O] \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors mettre le système global représenté par les équations d'état (2.3.22.) sous la forme condensée suivante :

$$\begin{cases} \vec{x}_6(i+1) = [A_6]\,\vec{x}_6(i) + [B_6]\vec{u}(i) + \vec{f}_6 \\ \vec{y}_6(i) = [C_6]\,\vec{x}_6 \end{cases} \qquad (2.3.23.)$$

où le vecteur d'état complet $\vec{x}_6$ est de dimension $(n+m+\ell+n_4)$.

Le critère quadratique à minimiser est toujours celui qui a été exprimé au §2.2.1.3.

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{\infty} \{ \vec{e}_2(i)^T [Q_1] \vec{e}_2(i) + \vec{u}(i)^T [R] \vec{u}(i) \}$$

.../...

Soit :

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{\infty} \{\vec{\varepsilon}(i)^T [Q] \vec{\varepsilon}(i) + \vec{v}(i)^T [Q_\sigma] \vec{v}(i) + \vec{u}(i)^T [R] \vec{u}(i)\}$$

La commande optimale calculée pour le système global (2.3.23.) a alors pour expression (Cf. § 2.3.1.1.) :

$$\vec{u}^*(i) = - [L_6] \vec{x}_6(i) + \vec{\mu}_6$$

avec :

$$\begin{cases} [L_6] = \{[R] + [B_6]^T [K_6][B_6]\}^{-1} [B_6]^T [K_6][A_6] \\ \vec{\mu}_6 = \{[R] + [B_6]^T [K_6][B_6]\}^{-1} [B_6] \{\vec{g}_6 - [K_6] \vec{f}_6\} \end{cases}$$

Décomposons la matrice $[L_6]$ et le vecteur $\vec{g}_6$ selon les schémas suivants :

$$[K_6] = \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} [K_{61}] & [K_{62}] & [K_{63}] \\ [K_{64}] & [K_{65}] & [K_{66}] \\ [K_{67}] & [K_{68}] & [K_{69}] \end{matrix}}_{n+m \quad \ell \quad n_4} \begin{matrix} \} n+m \\ \} \ell \\ \} n_4 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{g}_6 = \begin{bmatrix} \vec{g}_{61} \\ \vec{g}_{62} \\ \vec{g}_{63} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n+m \\ \} \ell \\ \} n_4 \end{matrix}$$

D'après la constitution des matrices $[A_6]$ et $[B_6]$ et du vecteur $\vec{f}_6$, il est immédiat d'écrire $[L_6]$ et $\vec{\mu}_6$ sous la forme :

$$[L_6] = \{[R] + [B_1]^T [K_{61}][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \left[[K_{61}][A_1],\ [K_{61}][H_1] + [K_{62}][E],\ [K_{61}][\Gamma_1] + [K_{63}][A_4]\right]$$

(2.3.24.)

et :

$$\vec{\mu}_6 = \{[R] + [B_1]^T [K_{61}][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{\vec{g}_{61} - [K_{62}][F] \vec{z} - [K_{63}][B_4]\vec{\pi}\}$$

(2.3.25.)

Les expressions de la matrice $[L_6]$ et du vecteur $\vec{\mu}_6$ ne sont donc fonction que des éléments $[K_{61}]$, $[K_{62}]$, $[K_{63}]$ et $\vec{g}_{61}$.

.../...

2.3.2.2. Etude de la matrice de bouclage

La matrice $[K_6]$, symétrique et définie-positive, est la solution en temps inverse de l'équation aux différences de type RICCATI suivante, calculée à partir de conditions finales nulles :

$$[K_6(i)] = [A_6]^T [K_6(i+1)][A_6] - [A_6]^T [K_6(i+1)][B_6][S_6(i+1)]^{-1} [B_6]^T [K_6(i+1)][A_6] + [C_6]^T [Q_1][C_6]$$

avec $[S_6(i+1)] = [R] + [B_6]^T [K_6(i+1)][B_6]$

Nous pouvons décomposer cette expression suivant les schémas de partitions adoptés. En considérant également les formules définissant $[L_6]$ et $\vec{\mu}_6$, il est facile de mettre en évidence qu'il suffit de conserver trois équations recurrentes partielles (sur un total de six) :

1ère équation :

$$[K_{61}(i)] = [A_1]^T [K_{61}(i+1)][A_1] - [A_1]^T [K_{61}(i+1)][B_1][S_1(i+1)]^{-1} [B_1]^T [K_{61}(i+1)][A_1] + [C'_1]^T [Q_1][C'_1]$$

avec $[S_1(i+1)] = [R] + [B_1]^T [K_{61}(i+1)][B_1]$ (2.3.26.)

2e équation :

$$[K_{62}(i)] = [A_1]^T \{[K_{61}(i+1)][H_1] + [K_{62}(i+1)][E]\} + [C'_1]^T [Q_1][H_2] - [A_1]^T [K_{61}(i+1)][B_1][S_1(i+1)]^{-1}\{[K_{61}(i+1)][H_1] + [K_{62}(i+1)][E]\}$$

(2.3.27.)

3e équation :

$$[K_{63}(i)] = [A_1]^T \{[K_{61}(i+1)][\Gamma_1] + [K_{63}(i+1)][A_4]\} + [C'_1]^T [Q_1][\Gamma_2] - [A_1]^T [K_{61}(i+1)][B_1][S_1(i+1)]^{-1} [B_1]^T \{[K_{61}(i+1)][\Gamma_1] + [K_{63}(i+1)][A_4]\}$$

(2.3.28.)

La première de ces équations aux différences est exactement identique à son homologue (2.2.23.) relative au système initial seulement muni de ses intégrateurs, c'est à dire que $[K_{61}] \equiv [K_1]$.

La deuxième équation a alors la même expression que pour le calcul d'une commande en asservissement ne tenant pas compte des perturbations mesurables, comme l'indique la formule (2.2.25.) précédemment déterminée. Par suite, nous avons également $[K_{62}] \equiv [K_{12}]$.

Enfin, il est très intéressant de remarquer, à partir de la troisième relation (2.3.28.) et de la constitution de la matrice $[L_6]$, que la partie de cette matrice correspondant à la compensation des perturbations mesurables est indépendante de la structure du modèle de référence.

2.3.2.3. Etude du vecteur d'anticipation

Ecrivons de nouveau l'expression (2.3.25.) du vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_6$ en tenant compte des résultats précédents :

$$\vec{\mu}_6 = \{[R]+[B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{\vec{g}_{61} - [K_{12}][F]\vec{z} - [K_{63}][B_4]\vec{\pi}\}$$

soit encore, en posant $\vec{h}_{61} = \vec{g}_{61} - [K_{12}][F]\vec{z} - [K_{63}][B_4]\vec{\pi}$:

$$\vec{\mu}_6 = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \vec{h}_{61} \qquad (2.3.29.)$$

Il est aisé de montrer que le vecteur $\vec{h}_{61}$ doit vérifier l'équation algébrique :

$$\vec{h}_{61} = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T \vec{h}_{61} - [K_{12}][F]\vec{z} - [K_{63}][B_4]\vec{\pi} \qquad (2.3.30.)$$

L'inversibilité de la matrice $\{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}$ ayant déjà été démontrée, le vecteur $\vec{h}_{61}$ a donc pour expression :

$$\vec{h}_{61} = -\{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} \{[K_{12}][F]\vec{z} + [K_{63}][B_4]\vec{\pi}\}$$

Le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_6$ peut finalement s'écrire :

$$\vec{\mu}_6 = \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_4$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{\mu}_2 = -\{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} \\ [K_{12}][F]\vec{z} \\ \vec{\mu}_4 = -\{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} \\ [K_{63}][B_4]\vec{\pi} \end{cases} \qquad (2.3.30.)$$

.../...

où [I] représente la matrice unitaire d'ordre (n+m)

Nous constatons donc encore que le vecteur d'anticipation complémentaire $\vec{\mu}_4$ destiné à la compensation des perturbations mesurables ne dépend pas de la structure du modèle de référence. De plus, il apparaît que le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_2$ correspondant au calcul d'une commande en asservissement n'est pas altéré par la prise en compte des perturbations mesurables.

2.3.3. Analyse de la solution proposée

Il ne nous paraît pas nécessaire de reprendre la démonstration de la validité des résultats d'ensemble, puisque les calculs correspondants sont tout à fait de même forme que les développements partiels effectués auparavant et déjà justifiés.

Du strict point de vue des méthodes de calcul, deux conclusions nous semblent importantes à souligner.

D'une part, la décomposition du système global en trois sous-ensembles permet d'alléger considérablement les calculs. D'autre part, la structure du modèle de référence n'a aucune influence sur la chaine de calcul correspondant à la compensation des perturbations mesurables, et vice-versa. Il faut néanmoins remarquer que la présence des intégrateurs modifie évidemment la forme de la compensation des perturbations mesurables, puisqu'elle change la structure des matrices d'évolution du système.

2.3.3.1. Synthèse des résultats

Après les différents développements présentés, il nous semble utile de résumer la structure finalement obtenue pour la commande. Le vecteur d'action $\vec{u}^*(i)$ s'exprime par :

$$\vec{u}^*(i) = -[L]\,\vec{x}(i) - [M]\,\vec{v}(i) + [P]\,\vec{s}(i) + [N]\,\vec{z} - [T]\,\vec{\zeta}(i) - [W]\,\vec{\pi} \qquad (2.3.3.1.)$$

Les différentes matrices intervenant dans cette formule sont définies par les expressions suivantes :

.../...

$$
\begin{aligned}
[[L],\ [M]] &= [S_1]^{-1}\ [B_1]^T\ [K_1][A_1] \\
[P] &= -[S_1]^{-1}\ [B_1]^T\ \{[K_1][H_1] + [K_{12}][E]\} \\
[T] &= [S_1]^{-1}\ [B_1]^T\ \{[K_1][\Gamma_1] + [K_{63}][A_4]\} \\
[N] &= -[S_1]^{-1}\ [B_1]^T\ \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1}\ [K_{12}][F] \\
[W] &= [S_1]^{-1}\ [B_1]^T\ \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1}\ [K_{63}][B_4] \\
\text{avec } [S_1] &= [R] + [B_1]^T\ [K_1][B_1]
\end{aligned}
$$

(2.3.32.)

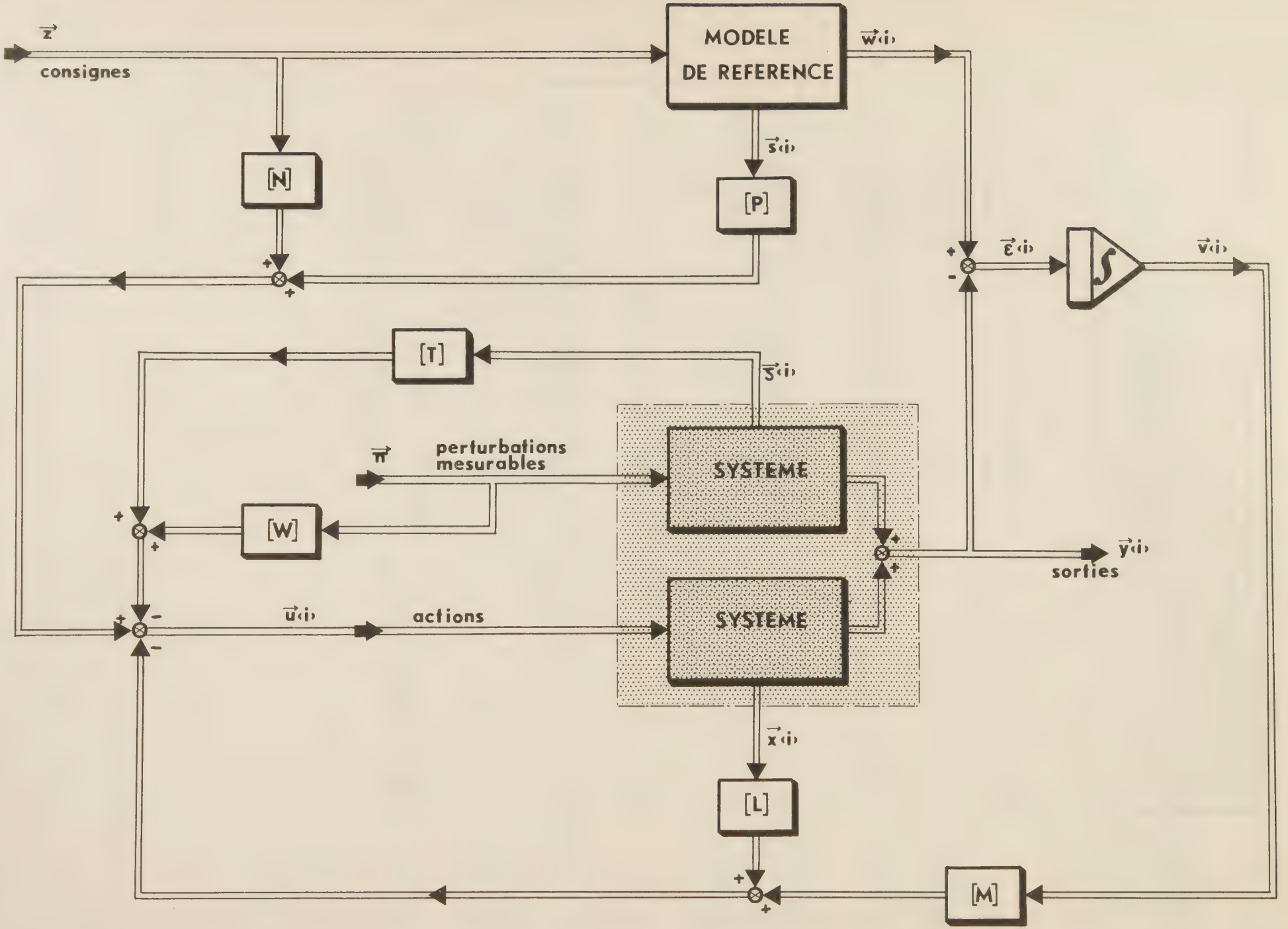
$[K_1]$, $[K_{12}]$ et $[K_{63}]$ sont les solutions-limites respectives des équations récurrentes suivantes, calculées en temps inverse à partir de conditions finales nulles :

$$
\begin{aligned}
[K_1(i)] &= \{[A_1] - [B_1][L_1(i+1)]\}^T\ [K_1(i+1)][A_1] + [C'_1]^T\ [Q_1][C'_1] \\
[K_{12}(i)] &= \{[A_1] - [B_1][L_1(i+1)]\}^T\ \{[K_1(i+1)][H_1] + [K_{12}(i+1)][E]\} + \\
&\quad [C'_1]^T\ [Q_1][H_2] \\
[K_{63}(i)] &= \{[A_1] - [B_1][L_1(i+1)]\}^T\ \{[K_1(i+1)][\Gamma_1] + [K_{63}(i+1)][A_4]\} \\
&\quad + [C'_1]^T\ [Q_1][\Gamma_2] \\
\text{avec } [L_1(i+1)] &= \{[R] + [B_1]^T\ [K_1(i+1)][B_1]\}^{-1}\ [B_1]^T\ [K_1(i+1)][A_1]
\end{aligned}
$$

(2.3.33.)

Le schéma général de l'ensemble de commande proposé est représenté par la figure 2.3.1.

.../...


$\vec{z}$
consignes
MODELE
DE REFERENCE
$\vec{w}(i)$
$\vec{s}(i)$
[N]
[P]
$\vec{\varepsilon}(i)$
$\vec{v}(i)$
[T]
$\vec{s}(i)$
$\vec{\pi}$
perturbations
mesurables
SYSTEME
[W]
$\vec{y}(i)$
sorties
$\vec{u}(i)$
actions
SYSTEME
$\vec{x}(i)$
[L]
[M]

2.3.3.2. Cas particuliers

Il est intéressant d'étudier succintement la simplification de la structure de compensation des perturbations mesurables pour deux cas particuliers assez fréquents en pratique.

- Le premier cas particulier correspond a un vecteur de perturbations mesurables $\vec{\pi}$ agissant, par l'intermédiaire d'une matrice $[B_7]$, directement sur le vecteur d'état $\vec{x}(i)$ de dimension n du système de base.

En posant $\vec{f}_7 = \begin{bmatrix} [B_7]\vec{\pi} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$, vecteur constant de dimension (n+m), la représentation d'état du système global comportant intégrateurs et modèle de référence est de la forme :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i+1) \\ \vec{s}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1][H_1] \\ [O]\ [E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i) \\ \vec{s}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ [O] \end{bmatrix} \vec{u}(i) + \begin{bmatrix} \vec{f}_7 \\ [F]\ \vec{z} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}(i) \\ \vec{v}(i) \end{bmatrix} = [[C'_1]\ ,\ [H_2]] \begin{bmatrix} \vec{x}_1(i) \\ \vec{s}(i) \end{bmatrix} \end{cases}$$

En reprenant les résultats obtenus aux § 2.2.2.1., 2.2.2.2. et 2.2.2.3., il est facile de montrer que la présence du vecteur $\vec{f}_7$ ne modifie pas la matrice de bouclage $[L_2]$, mais que le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_7$ correspondant a pour expression :

$$\vec{\mu}_7 = \{[R] + [B1]^T\ [K_1][B_1]\}^{-1}\ [B_1]^T\ \vec{h}_7$$

où $\vec{h}_7$ est un vecteur de dimension (n+m) défini par :

$$\vec{h}_7 = \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\ \vec{h}_7 - [K_1]\ \vec{f}_7 - [K_{12}][F]\ \vec{z}$$

c'est à dire qu'il est possible d'écrire $\vec{\mu}_7$ sous la forme :

$$\vec{\mu}_7 = \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_{71}$$

.../...

avec :

$$\begin{cases} \vec{\mu}_2 = -\{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} \\ [K_{12}][F] \vec{z} \\ \vec{\mu}_{71} = -\{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} \\ [K_1] \vec{f}_7 \end{cases}$$

La présence du terme $[B_7]\vec{\pi}$ ne modifie donc pas le vecteur d'anticipation $\vec{\mu}_2$ relatif aux consignes, mais lui adjoint simplement un nouveau vecteur prédictif $\vec{\mu}_{71}$ relatif aux perturbations mesurables.

L'expression générale de la commande est alors dans ce cas :

$$\boxed{\vec{u}^*(i) = -[L]\vec{x}(i) - [M]\vec{v}(i) + [P]\vec{s}(i) + [N]\vec{z} - [W]\vec{\pi}}$$

(2.3.34.)

Le vecteur d'action est ainsi complété par un terme d'anticipation $-[W]\vec{\pi}$, défini à partir de l'expression algébrique suivante où [I] est la matrice unitaire d'ordre (n+m) :

$$\boxed{[W] = \{[R] + [B_1]^T [K_1][B_1]\}^{-1} [B_1]^T \{[I] - \{[A_1] - [B_1][L_1]\}^T\}^{-1} [K_1][\textcircled{H}_c][B_7]}$$

(2.3.35.)

L'élément $[\textcircled{H}_c]$ figurant dans cette formule est une matrice de passage de dimension (n+m) x n telle que :

$[\textcircled{H}_c] = \begin{bmatrix} [I] \\ [O] \end{bmatrix}$, où [I] symbolise la matrice unitaire d'ordre n.

.../...

- Le second cas particulier intéressant est relatif à l'éventuelle possibilité de négliger la dynamique liant les sorties du système aux mesures des perturbations. Les équations d'état correspondantes peuvent alors être mises sous la forme :

$$\boxed{\vec{\zeta}(i+1) = [B_4]\ \vec{\pi}} \qquad (2.3.36.)$$

La matrice $[A_4]$ de la représentation d'état (2.3.22.) est donc identiquement nulle. Par suite, il est facile de faire apparaître dans les formules générales (2.3.33.) que la détermination de la matrice $[K_{63}]$ ne nécessite plus alors le calcul d'une équation recurrente. En effet, la nullité de $[A_4]$ permet d'obtenir directement $[K_{63}]$ par une expression algébrique en fonction de $[K_1]$.

Dans ce cas, le vecteur de commande a donc toujours pour forme générale :

$$\boxed{\vec{u}^{**}(i) = -[L]\ \vec{x}(i) - [M]\ \vec{v}(i) + [P]\ \vec{s}(i) + [N]\ \vec{z} - [T]\ \vec{\zeta}(i) - [W]\ \vec{\pi}} \qquad (2.3.37.)$$

mais il est alors possible d'obtenir les matrices [T] et [W] relatives aux perturbations mesurables sans avoir à calculer d'équation recurrente supplémentaire.

2.3.3.3. *Obtention des variables d'état décrivant les perturbations*

Dans le cas général, la compensation des perturbations mesurables introduit également dans l'expression de la commande le terme $-[T]\ \vec{\zeta}(i)$ nécessitant la connaissance du vecteur d'état $\vec{\zeta}(i)$.

En boucle ouverte, le système physique peut être représenté de la manière suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{x}(i+1) \\ \vec{\zeta}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [A_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{\zeta}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] & [0] \\ [0] & [B_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}(i) \\ \vec{\pi} \end{bmatrix} \\ \vec{y}(i) = [[C], [C_4]] \begin{bmatrix} \vec{x}(i) \\ \vec{\zeta}(i) \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (2.3.38.)$$

Si les deux sous-ensembles caractérisés par les vecteurs d'état $\vec{x}$ et $\vec{\zeta}$ sont observables, et si les matrices [A] et $[A_4]$ n'ont aucune valeur propre commune, la représentation d'état globale (2.3.38.) est également observable. Cependant, contrairement au cas de la commande, le calcul de l'estimateur global ne peut pas être décomposé en deux parties. Cet état de fait se conçoit d'ailleurs assez bien par un raisonnement physique.

.../...

Le calcul de l'estimateur risque donc d'être notablement alourdi par la prise en compte des perturbations mesurables, mais, sous les conditions énoncées, cette solution rigoureuse demeure cependant envisageable.

Toutefois, il faut remarquer que la détermination d'une matrice de bouclage de l'estimateur relative au vecteur d'état $\vec{\zeta}$ revient en quelque sorte à considérer les perturbations intervenant sur les perturbations ! Il nous semble par conséquent admissible, du moins dans un premier temps, d'estimer le vecteur d'état $\vec{\zeta}$ simplement à partir des matrices $[A_4]$ et $[B_4]$ et de la mesure du vecteur $\vec{\pi}$:

$$\boxed{\vec{\zeta}(i+1) = [A_4]\ \vec{\zeta}(i) + [B_4]\ \vec{\pi}} \qquad (2.3.39.)$$

L'estimation du vecteur d'état initial $\vec{x}$ demeure alors inchangée, mais il faut bien sûr tenir compte du vecteur $[C_4]\ \vec{\zeta}(i)$ dans les expressions du vecteur des sorties filtrées $\vec{y}(i)$ et du vecteur des sorties prédites $\vec{y}^*(i)$ tels qu'ils ont été définis au § 2.1.3.2.

L'action intégrale présente dans l'ensemble de commande choisi permet bien de toutes façons de compenser en boucle fermée toutes les éventuelles imprécisions du modèle caractérisant l'influence des perturbations mesurables. De même, la structure adoptée pour l'estimateur filtre assure toujours en régime permanent l'égalité en valeurs moyennes des vecteurs $\vec{y}(i)$, $\vec{\hat{y}}(i)$ et $\vec{y}^*(i)$.

.../...

2.4. EXEMPLES DE COMPORTEMENTS EN SIMULATION

Entre les développements théoriques et leur application à des procédés réels, les études de simulation ont souvent un rôle important. En effet, certaines caractéristiques de fonctionnement des systèmes considérés ne sont pas toujours faciles à mettre en évidence de manière précise par des voies purement théoriques. Ceci est particulièrement vrai pour les systèmes multidimensionnels bouclés d'ordre élevé. La simulation se révèle être alors un moyen d'investigation généralement simple et efficace.

De plus, les études de simulation présentent l'avantage de permettre de prendre en considération séparément des phénomènes souvent superposés dans le cas de procédés réels, et surtout de disjoindre à volonté le problème de la commande du problème de l'identification.

2.4.1. Etude de la commande en asservissement

La commande en asservissement que nous proposons assure dans de bonnes conditions la réalisation des changements de consignes. Nous avons choisi d'en illustrer en simulation les principaux aspects à partir du modèle discret précédemment déterminé caractérisant l'évolution dynamique du grammage sec et de l'humidité de la feuille de papier fabriquée sur l'unité pilote du Centre Technique. La figure 2.4.1. rappelle la forme de ce modèle et les fonctions de transfert continues correspondantes.

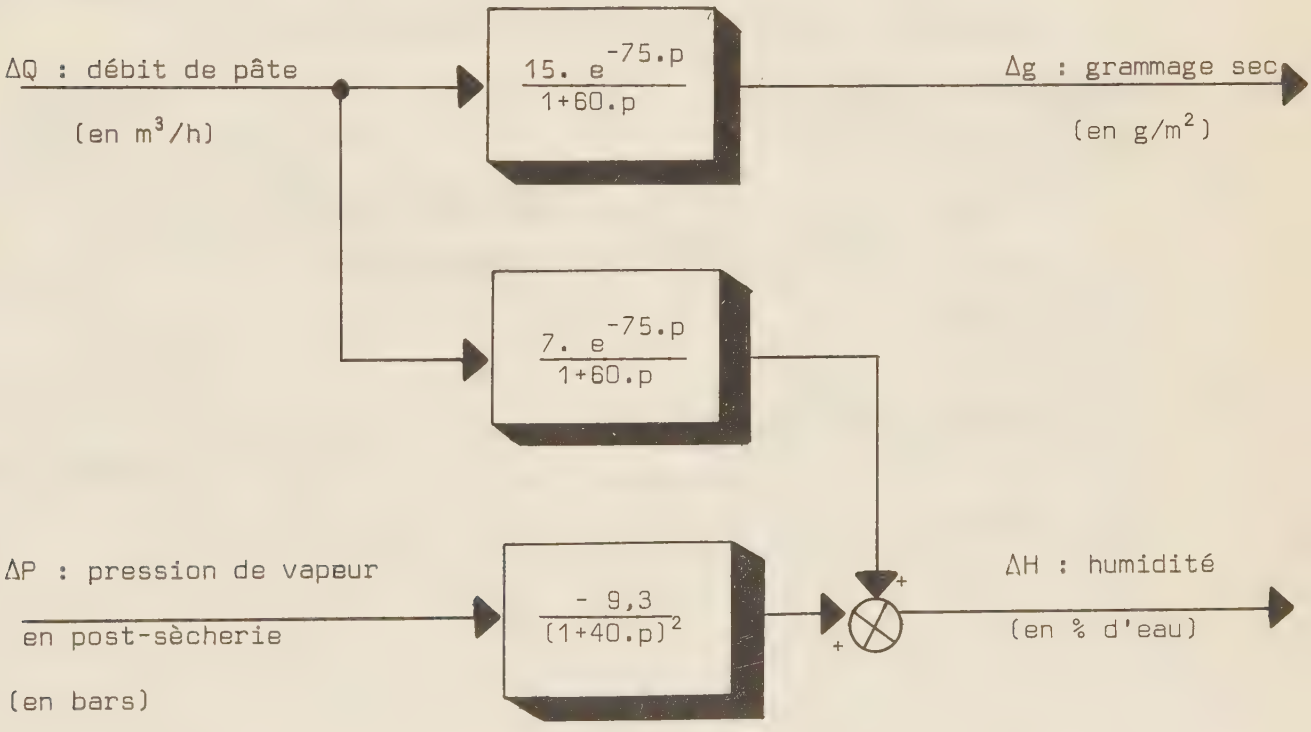


Figure 2.4.1. - SYSTEME UTILISE POUR LES SIMULATIONS

.../...

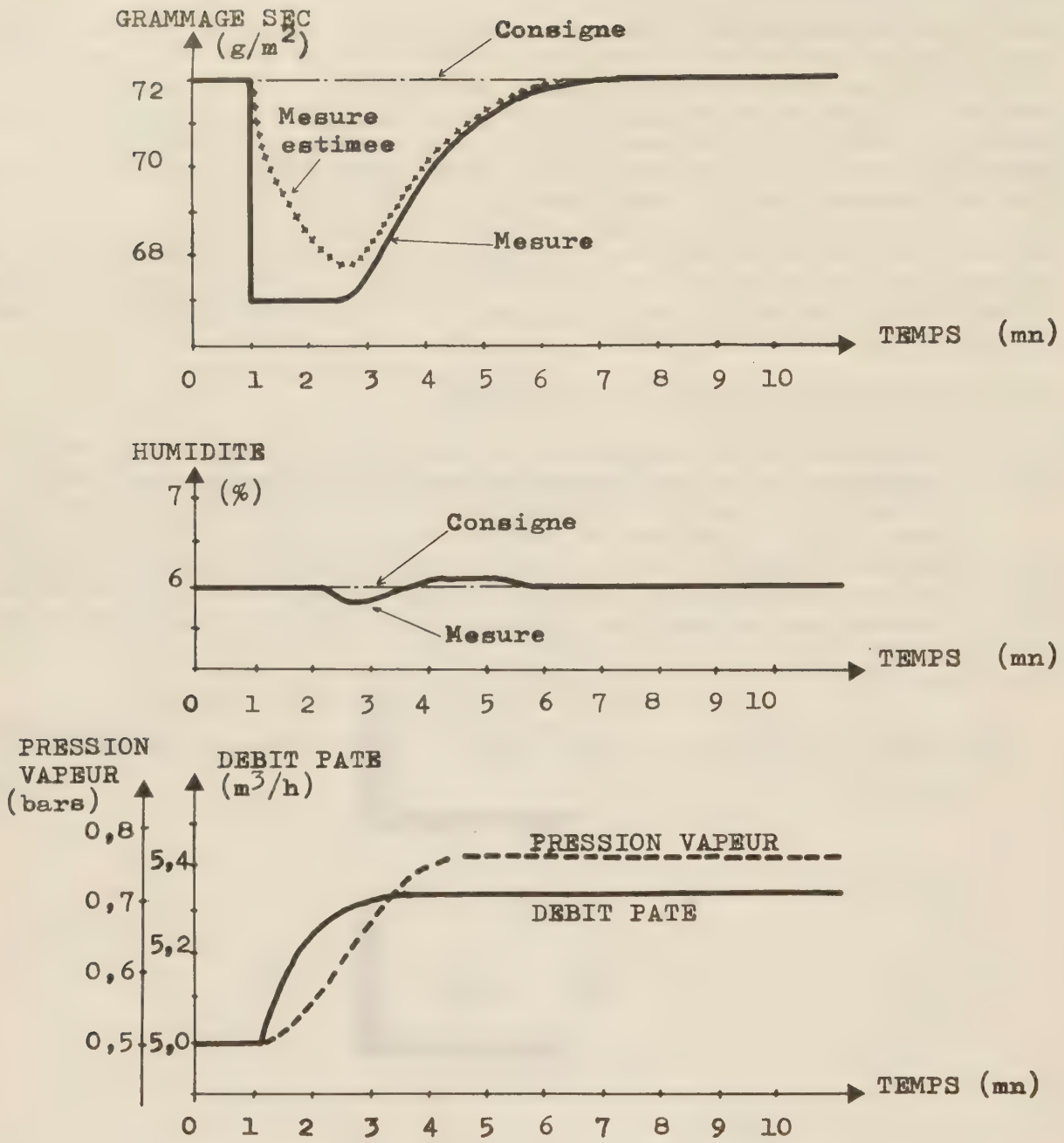


FIGURE 2.4.2 REPONSE A UNE PERTURBATION SUR LE GRAMMAGE SEC

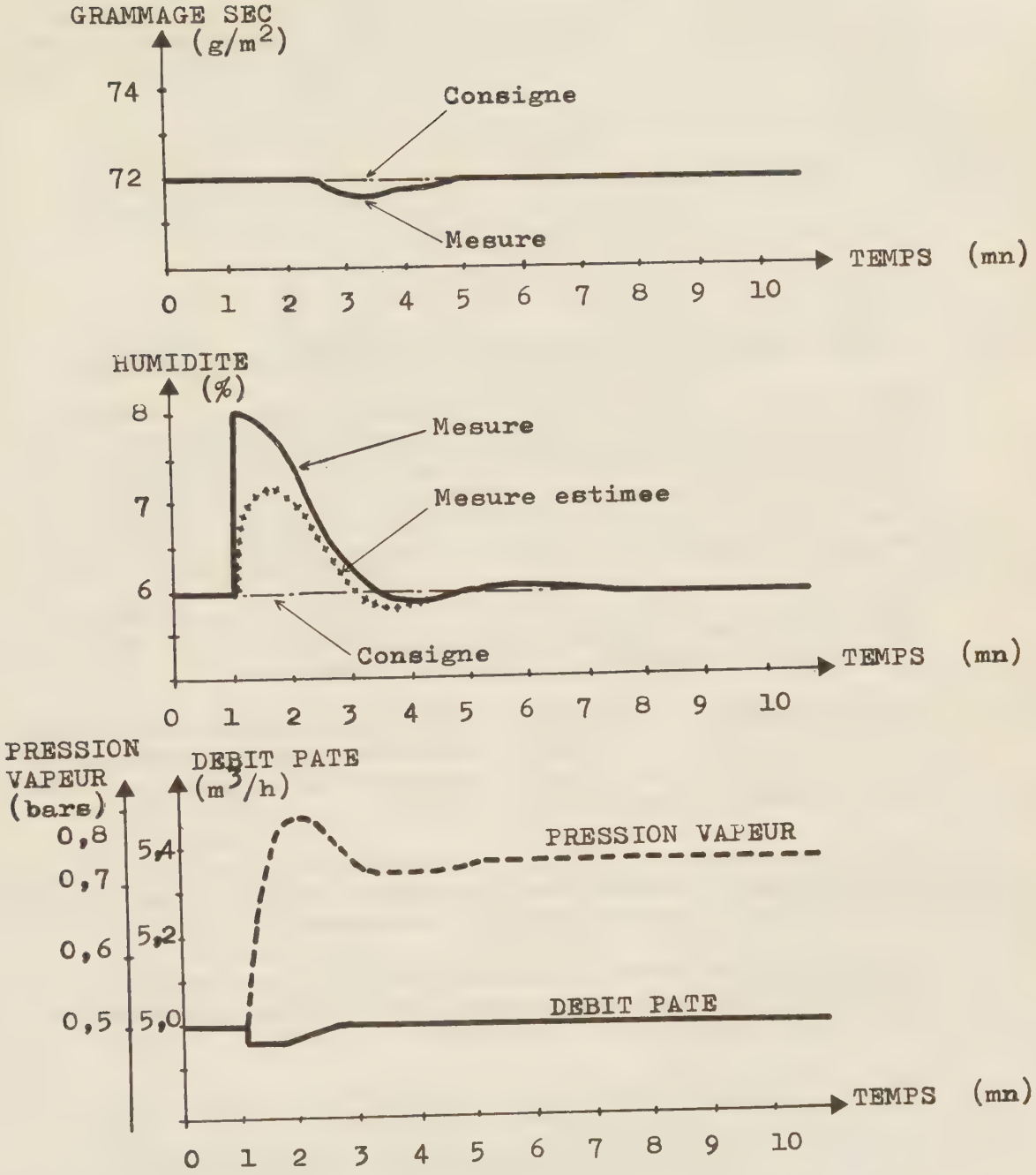


FIGURE 2.4.3 REPONSE A UNE PERTURBATION SUR L'HUMIDITE

Les études en simulation se rapportant au fonctionnement dynamique du système ne font intervenir que les variations des grandeurs d'action et de sortie. Cependant, afin de présenter les résultats de manière plus facilement comparable à des évolutions réelles, nous avons choisi pour définir le point statique initial des paramètres fréquemment rencontrés sur la machine à papier expérimentale du Centre Technique :

- débit pâte moyen = $Q_{10} = 5\ m^3/h$
- pression de vapeur moyenne en post-sècherie : $P_o = 0,5$ bar
- grammage sec moyen : $G_o = 72\ g/m^2$
- humidité moyenne : $H_o = 6\ \%$

2.4.1.1. Améliorations apportées par le modèle de référence

Nous avons vu que la prise en compte d'un modèle de référence ne modifie pas les matrices de bouclage de la commande multidimensionnelle. Nous avons donc dans un premier temps recherché des performances satisfaisantes en réaction, par le choix d'un critère de pénalisation approprié. Les figures 2.4.2. et 2.4.3. présentent deux exemples illustrant le fonctionnement en régulation de l'ensemble de commande ainsi déterminé.

La figure 2.4.2. est relative à une perturbation en échelon de - $5g/m^2$ apparaissant sur le grammage sec. La figure 2.4.3. se rapporte à une perturbation en échelon de + 2 % sur l'humidité.

A titre indicatif, l'évolution de la mesure estimée correspondant à la sortie perturbée est également représentée sur les graphiques concernés. Ce type de perturbation peut correspondre par exemple à une modification de la vitesse de la machine.

Nous avons ensuite simulé des changements de consignes d'une part avec une commande n'utilisant pas de modèle de référence, et d'autre part avec la commande en asservissement précédemment déterminée.

La figure 2.4.4. présente un changement de + $5g/m^2$ sur la consigne de grammage sec en l'absence du modèle de référence. Le vecteur d'action a alors pour expression :

$$\vec{u}(i) = - [L]\vec{x}(i) - [M]\vec{v}(i) + [N']\vec{z}$$

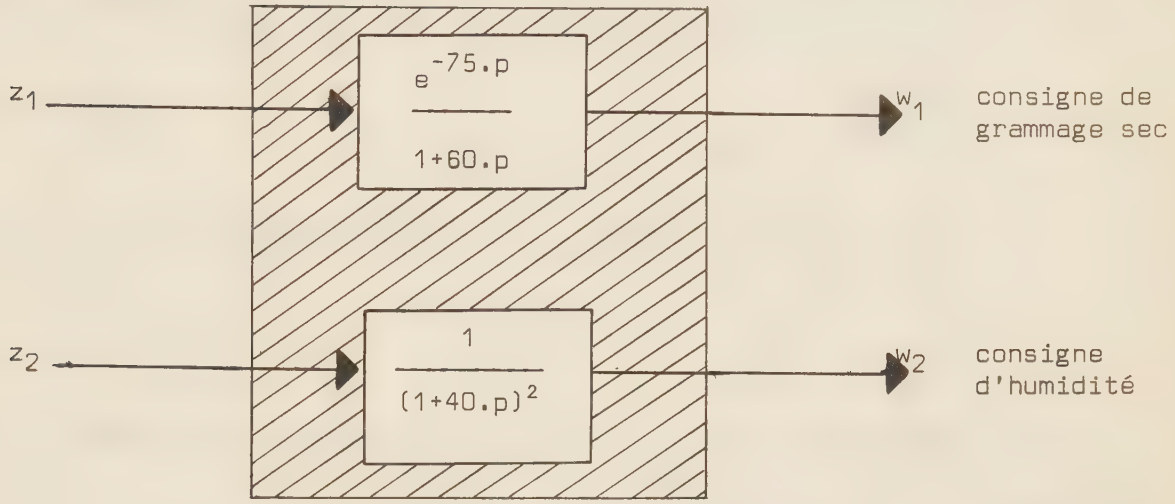
L'emploi d'une telle commande engendre un dépassement important (environ 4 g/m^2) sur la mesure de grammage sec. L'humidité subit par ailleurs des variations transitoires atteignant 1,5 %, et révèle donc un découplage des sorties peu satisfaisant. Enfin, les amplitudes des actions sont considérables en début d'évolution, et constituent un inconvénient certain pour une application pratique.

.../...

La figure 2.4.5. illustre le même changement de consigne de + $5g/m^2$ sur le grammage sec, mais en utilisant un modèle de référence, c'est à dire avec un vecteur d'action défini par :

$$\vec{u}(i) = - [L] \vec{x}(i) - [M] \vec{v}(i) + [P] \vec{s}(i) + [N] \vec{z}$$

La dynamique des processus générant les sorties $\vec{w}$ du modèle est prise pour cet exemple identique à la dynamique liant le débit de pâte au grammage sec d'une part et la pression de vapeur en post-sècherie à l'humidité d'autre part. Avec les notations précédemment employées, le modèle de référence peut donc être schématisé de la manière suivante :



L'utilisation de ce modèle se fait évidemment sous la forme discrétisée correspondante.

Il apparaît que la mesure de grammage sec reste toujours très proche de la sortie du modèle de référence et que la variation transitoire de l'humidité est faible. Les amplitudes des actions demeurent par ailleurs parfaitement acceptables. Il faut noter à ce propos que l'évolution du débit de pâte est voisine d'un échelon, ce qui est logique compte tenu du choix du modèle de référence.

La figure 2.4.6. se rapporte à un changement de la consigne d'humidité égal - 2 %, sans utilisation d'un modèle de référence. Ici encore l'action principalement concernée, c'est à dire la pression de vapeur, subit en début dévolution une variation extrêmement importante semblant bien peu compatible avec une utilisation industrielle. La mesure de l'humidité présente par suite un dépassement transitoire assez important (environ 1,3 %) par rapport à l'incrément de consigne demandé.

.../...

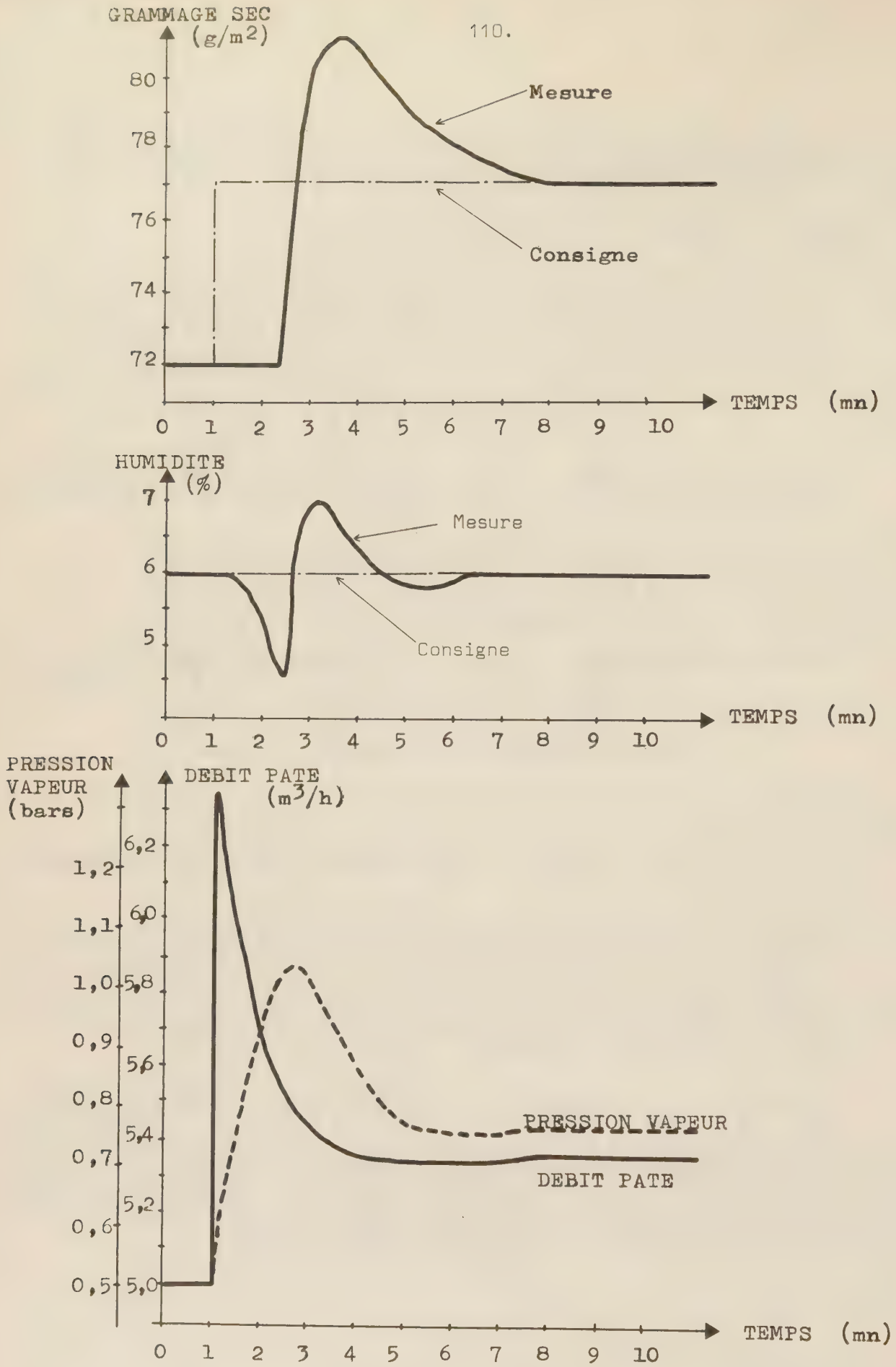


FIGURE 2.4.4 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC SANS MODELE DE REFERENCE

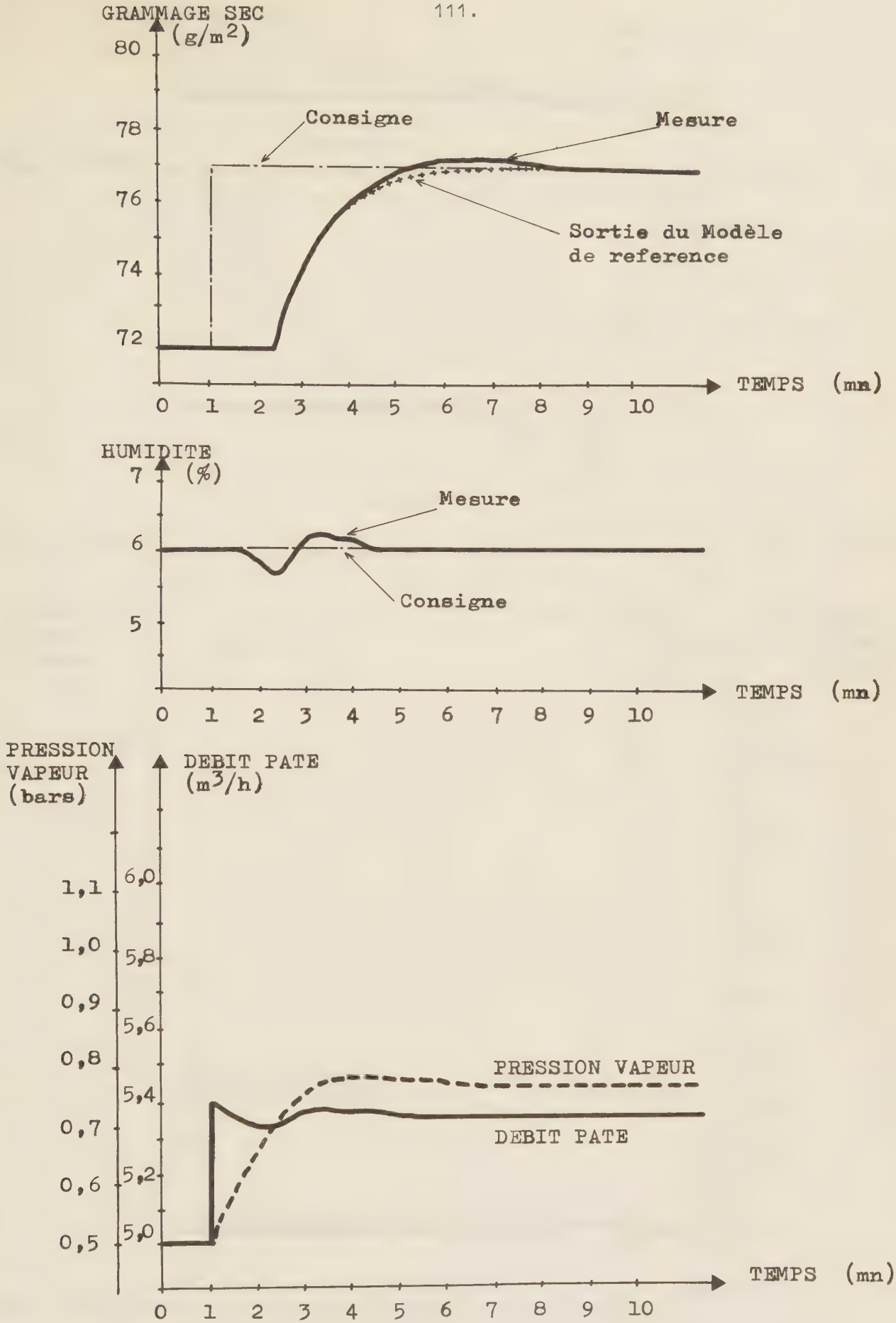


FIGURE 2.4.5 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC AVEC MODELE DE REFERENCE

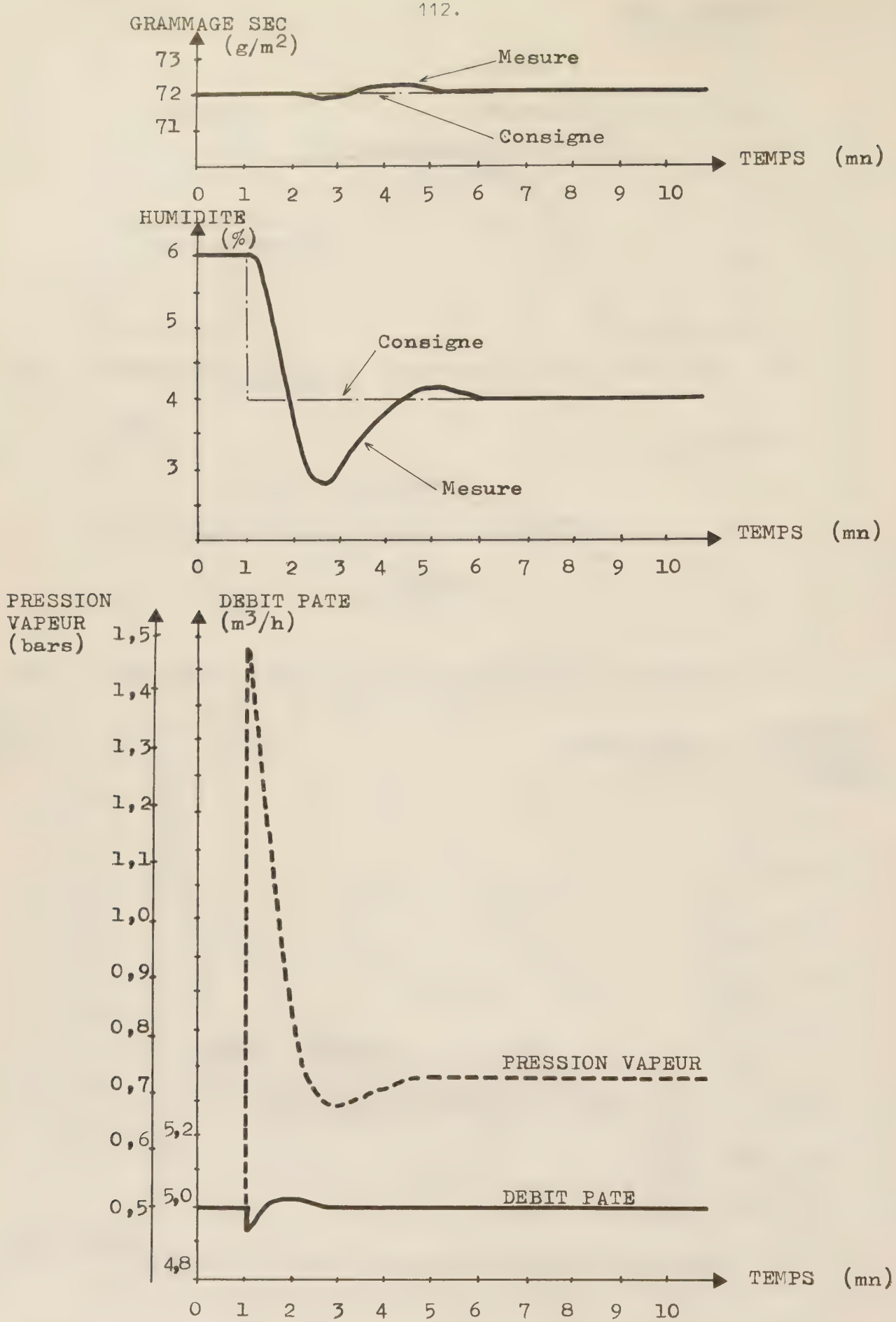


FIGURE 2.4.6 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE D'HUMIDITE SANS MODELE DE REFERENCE

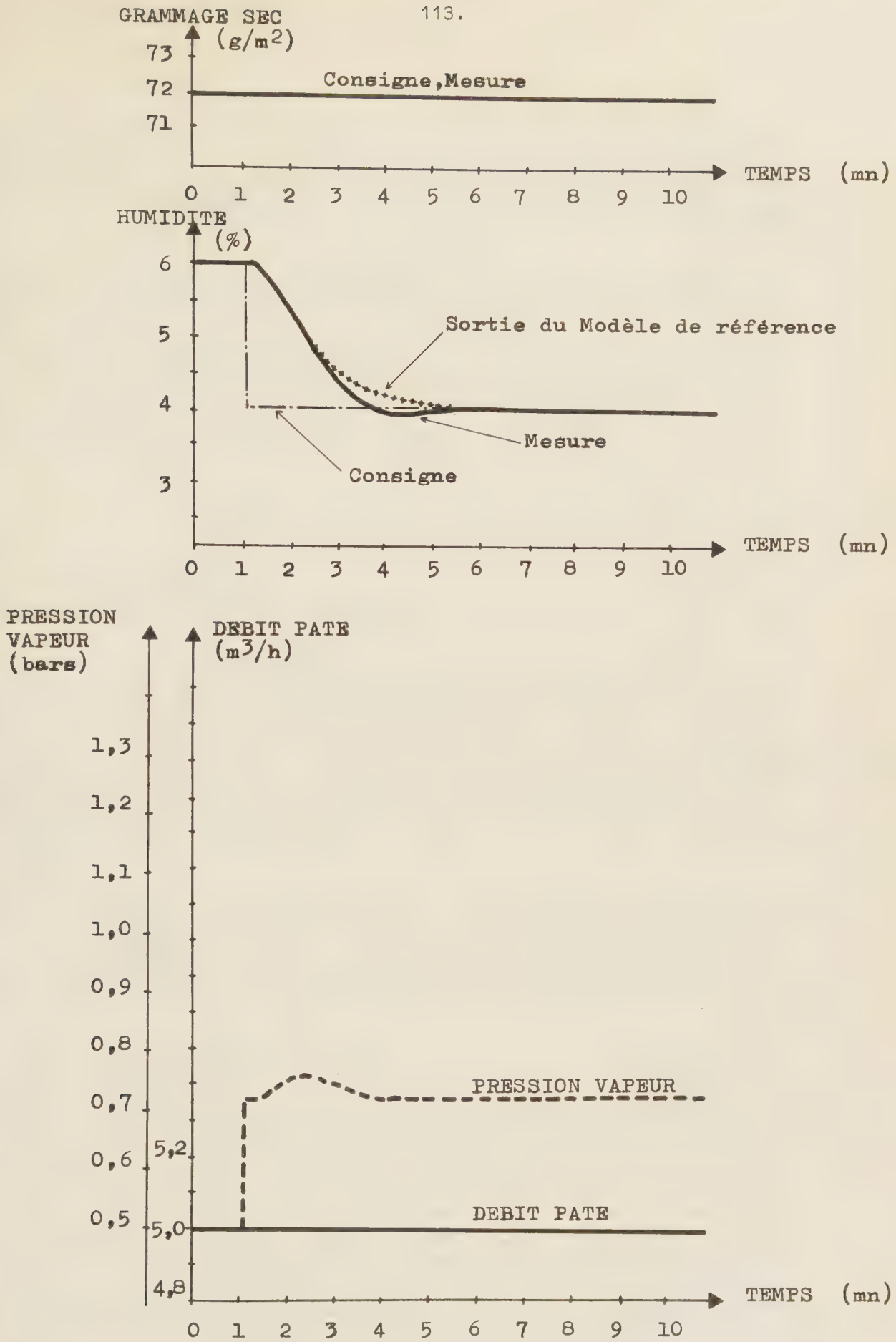


FIGURE 2.4.7 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE D'HUMIDITE AVEC MODELE DE REFERENCE

La figure 2.4.7. est relative au même changement de consigne accompli à l'aide de la structure de commande comportant le modèle de référence. La pression de vapeur évolue presque en échelon, ce qui est conforme aux résultats attendus d'après la structure du modèle. La mesure d'humidité demeure toujours très voisine de la sortie désirée.

Cette brève étude comparative illustre bien, nous semble-t-il, l'intérêt d'inclure un modèle de référence dans la structure de commande multidimensionnelle. La commande ainsi déterminée assure en effet aux sorties du procédé des évolutions très satisfaisantes, tout en conservant pour les actions des amplitudes de variations transitoires toujours parfaitement admissibles. Sans la prise en compte du modèle de référence il aurait été nécessaire pour obtenir des changements de consignes corrects de pénaliser beaucoup plus fortement les actions dans le critère quadratique et, en conséquence, de réduire notablement les performances du système en réaction.

2.4.1.2. *Choix des performances en asservissement*

L'insertion d'un modèle de référence dans la structure de commande multidimensionnelle permet une bonne séparation entre le problème du choix des boucles de réaction et le problème des performances en asservissement.

Avec l'aide de la simulation, il est en effet généralement assez simple de parvenir au comportement désiré pour le système en réaction en agissant sur les matrices de pénalisation du critère quadratique. Une fois le choix du critère arrêté, les matrices de bouclage [L] et [M] intervenant dans la commande sont fixées. Il est alors possible de rechercher une évolution en asservissement présentant certaines caractéristiques voulues,en déterminant en conséquence le modèle de référence. Son choix influe en effet uniquement, comme nous l'avons montré, sur les matrices [P] et [N] constituant la partie anticipative de la commande.

Pour illustrer en simulation le comportement de la structure d'action proposée, nous avons conservé le modèle précédemment utilisé en cherchant à modifier la réponse du grammage sec à un changement de sa consigne. Pour cela, nous avons successivement donné différentes valeurs à la constante de temps T_{R1} du modèle de référence correspondant à la sortie désirée pour le grammage sec.

Les figures 2.4.8. à 2.4.13. présentent les évolutions des entrées et des sorties du système pour des valeurs de cette constante de temps T_{R1} respectivement égales à 180 s, 80 s, 60 s, 40 s, 20 s. et zéro. Ce dernier cas correspond donc à une sortie du modèle de référence en échelon retardé. Les deux premiers exemples (T_{R1} = 180 s et T_{R1} = 80 s) constituent un ralentissement du système par rapport à son comportement en boucle ouverte. Les trois derniers exemples représentent au contraire une accélération. Il nous a semblé utile d'inclure de nouveau dans cette série de figures le cas de l'égalité (60 s) entre la constante de temps du modèle de référence et la constante de temps liant le débit de pâte au grammage sec, afin de faciliter les comparaisons.

.../...

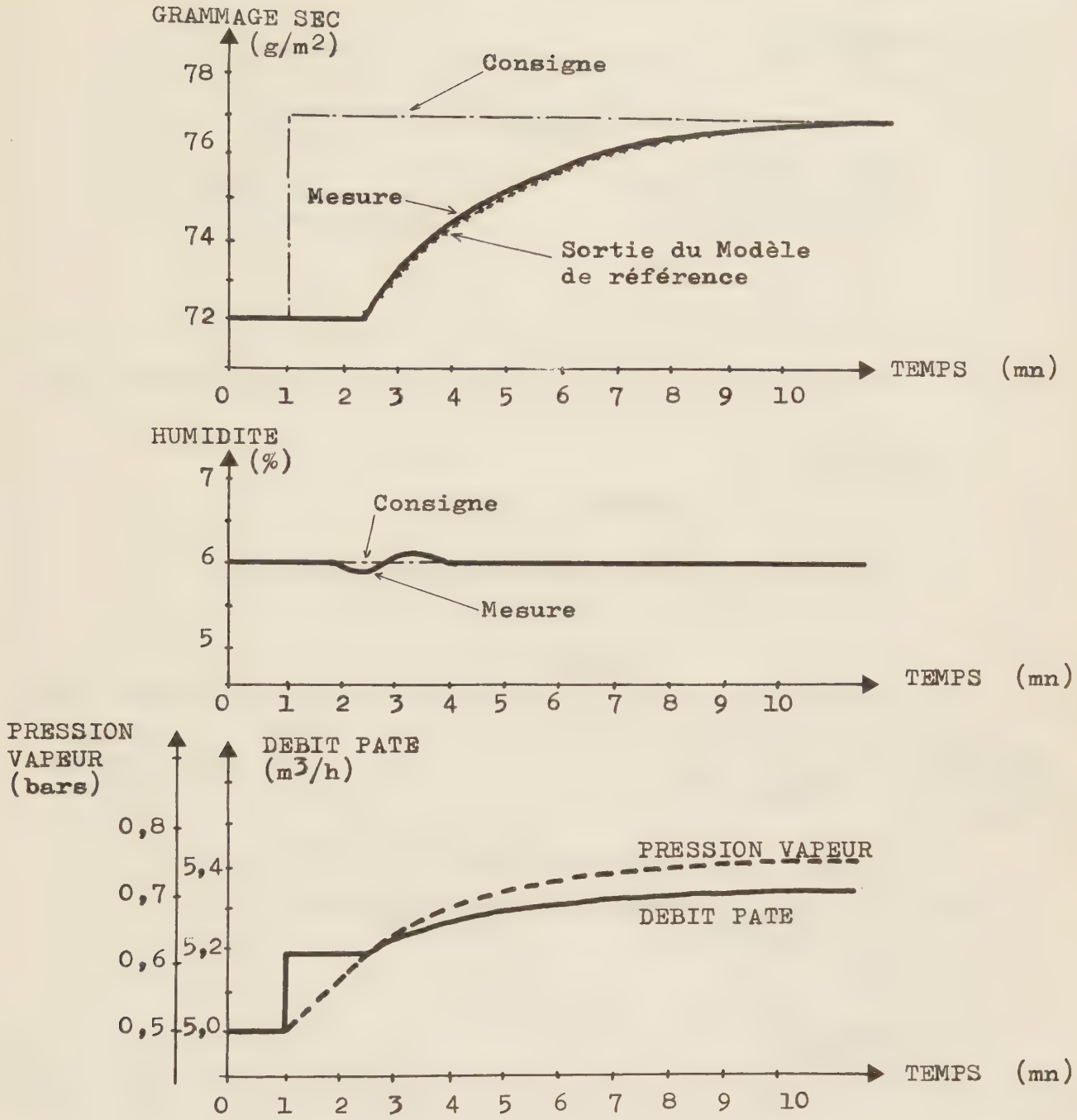


FIGURE 2.4.8 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC

CONSTANTE DE TEMPS T_{R1} DU MODELE DE REFERENCE = 180 s.

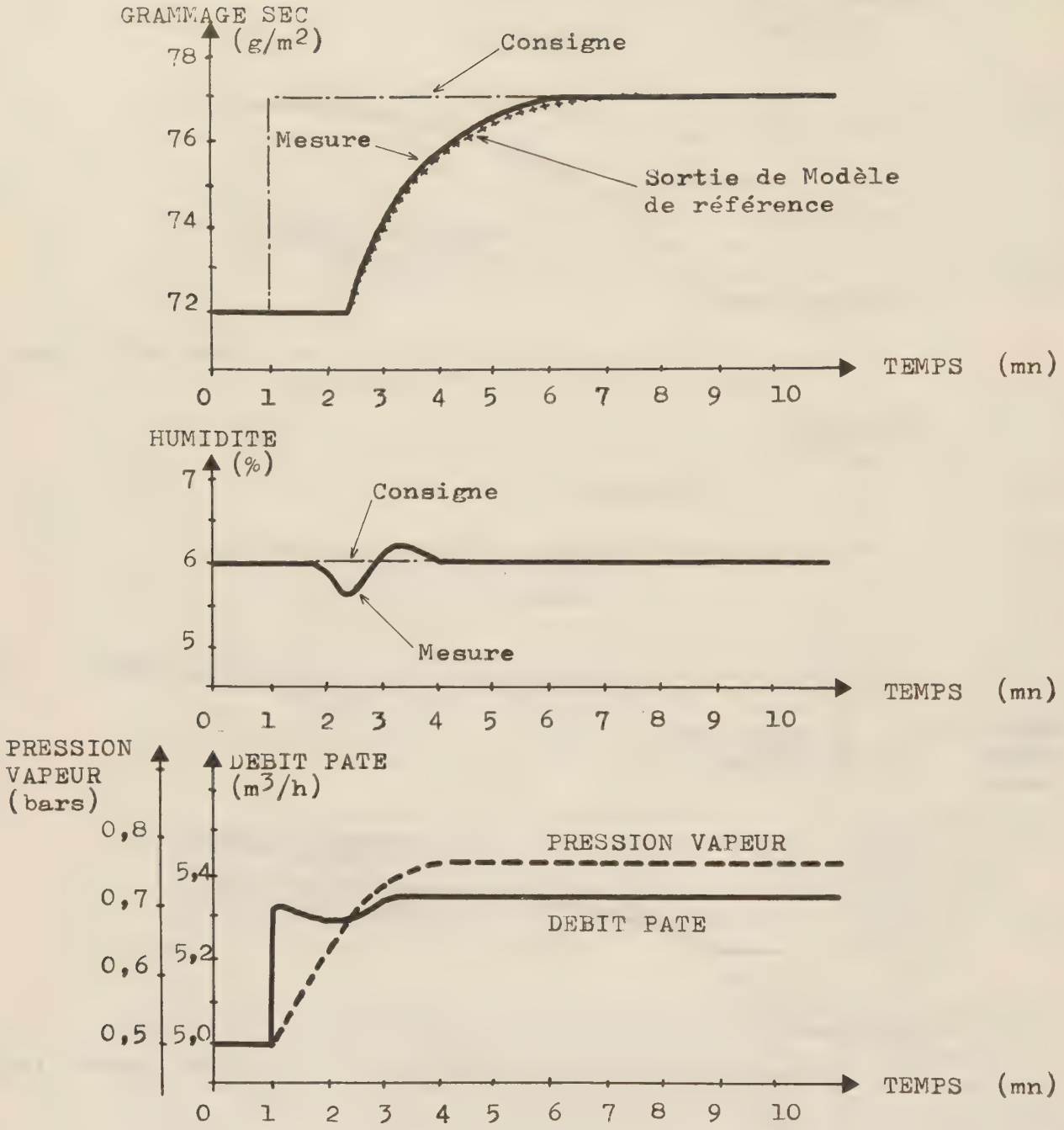


FIGURE 2.4.9 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC

CONSTANTE DE TEMPS T_{R1} DU MODELE DE REFERENCE = 80 s.

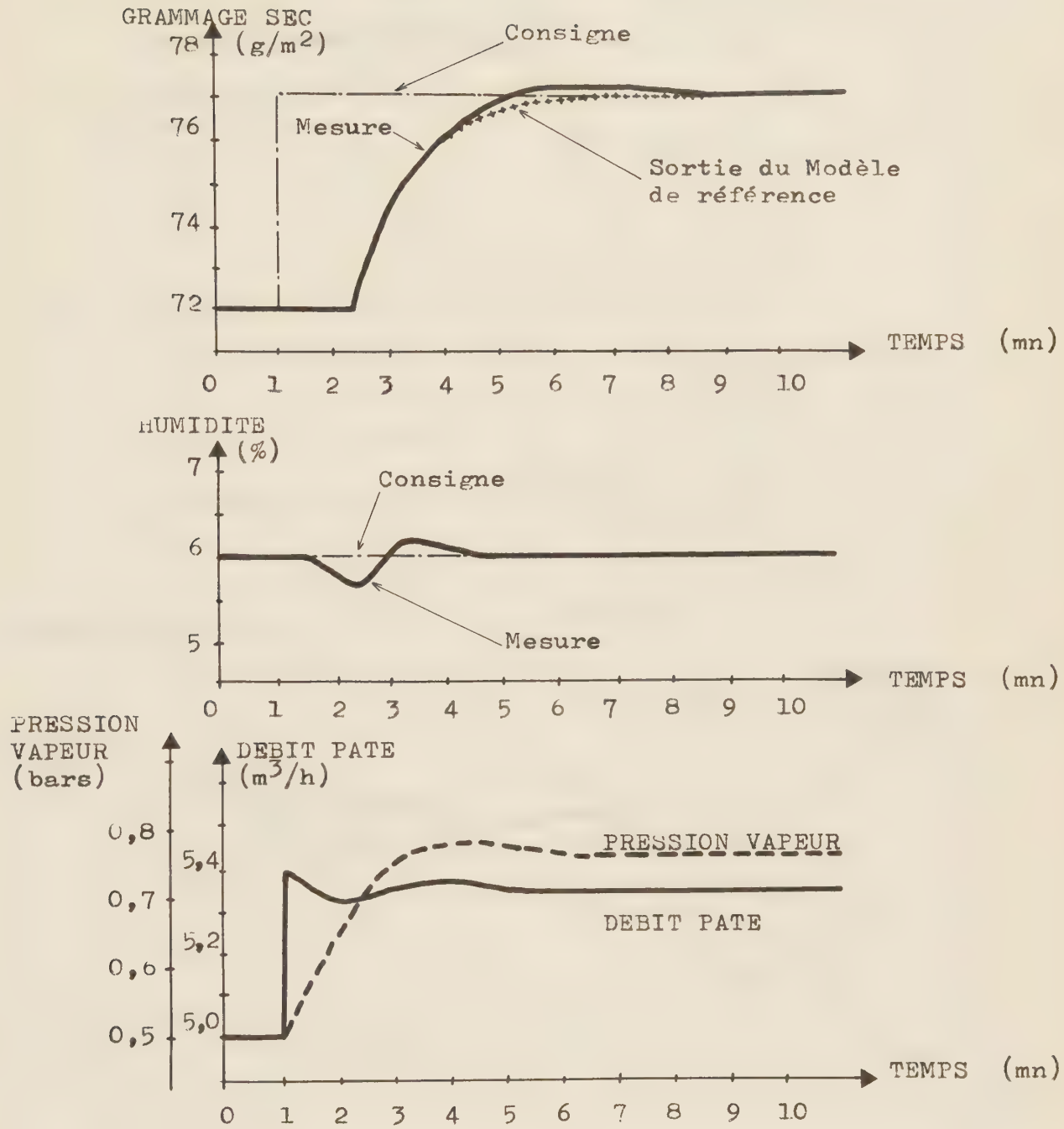


FIGURE 2.4.10 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC

CONSTANTE DE TEMPS T_{R1} DU MODELE DE REFERENCE = 60 s.

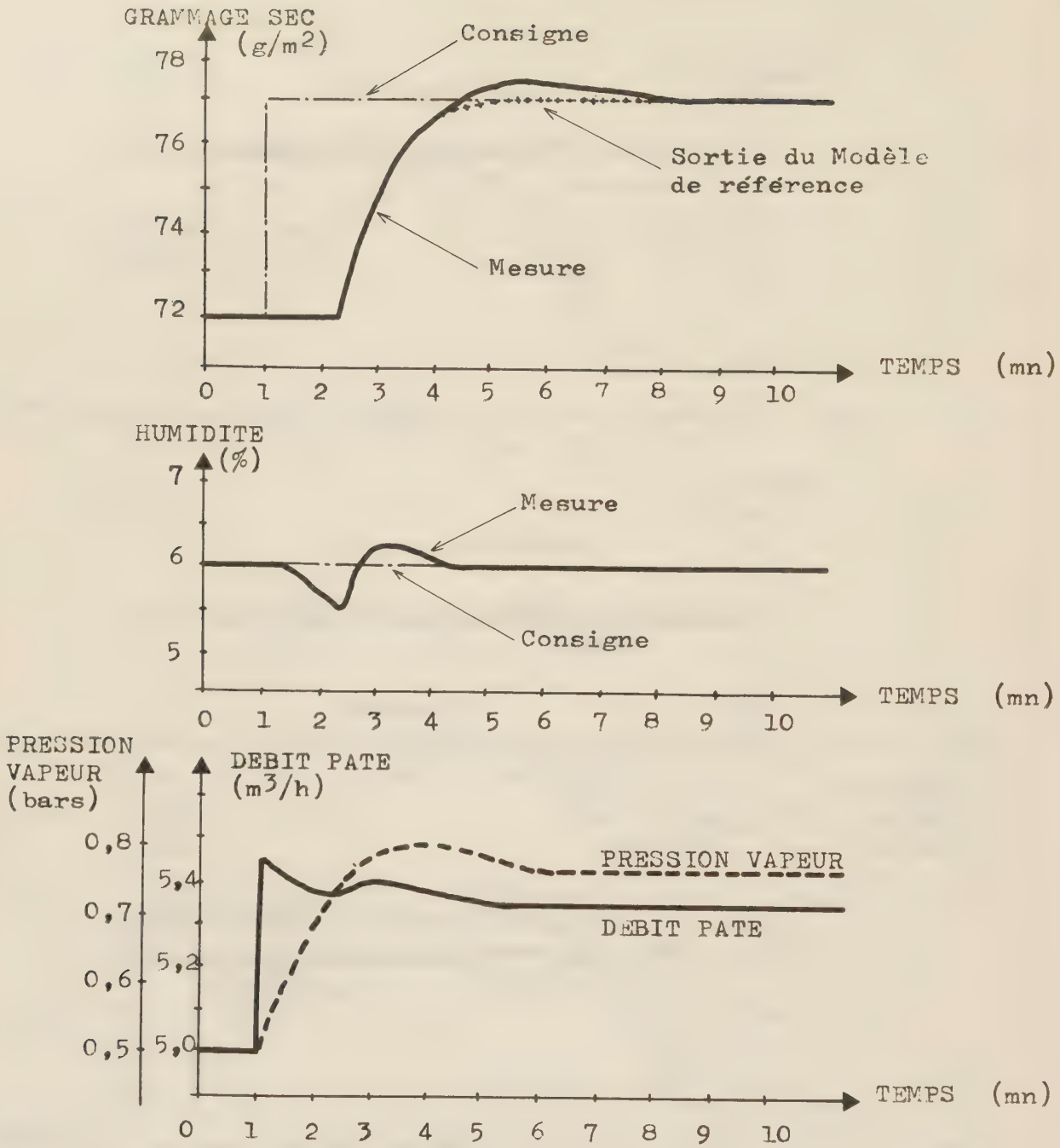


FIGURE 2.4.11 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC

CONSTANTE DE TEMPS T_{R1} DU MODELE DE REFERENCE = 40 s.

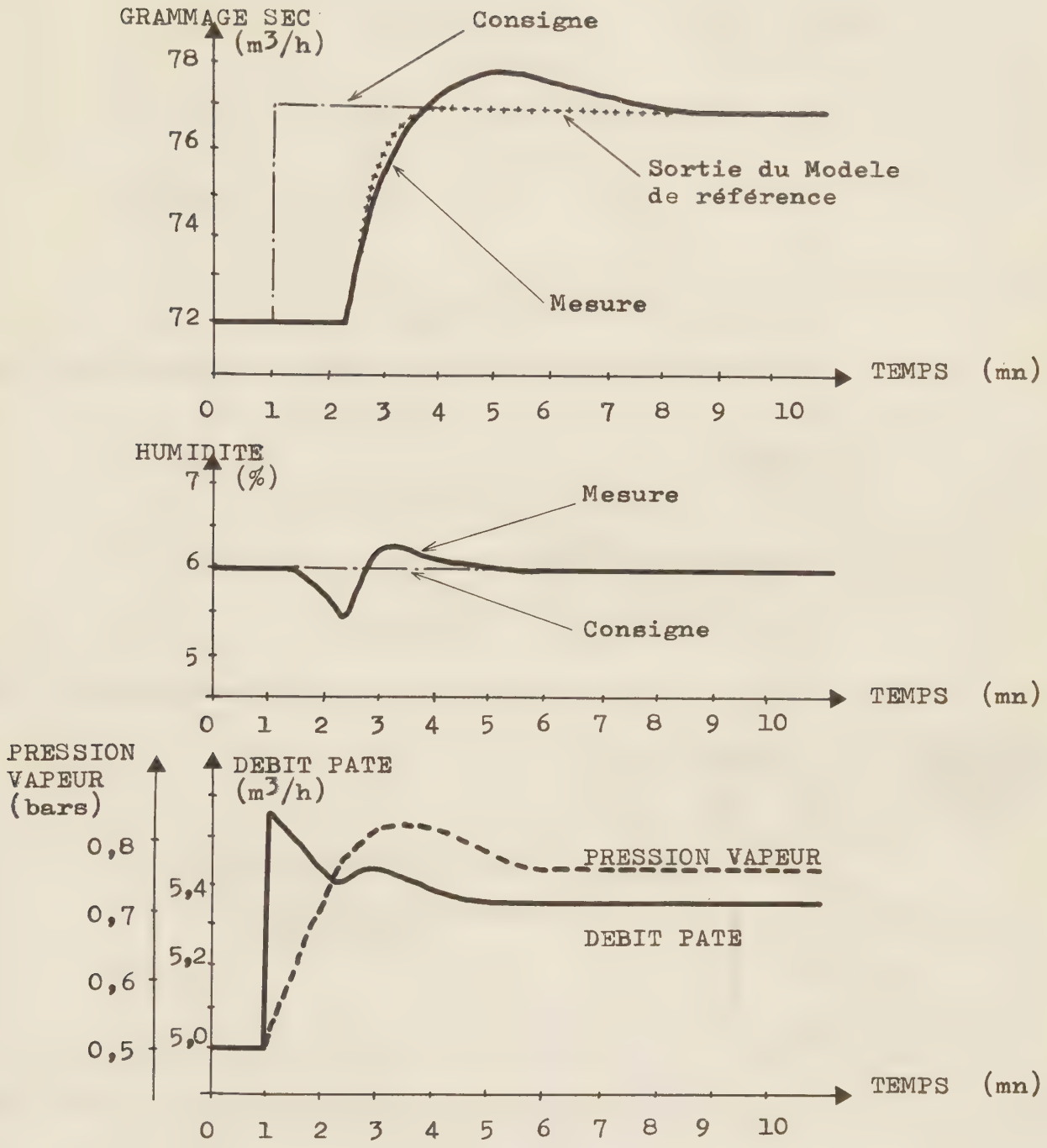


FIGURE 2.4.12 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC

CONSTANTE DE TEMPS T_{R1} DU MODELE DE REFERENCE = 20 s.

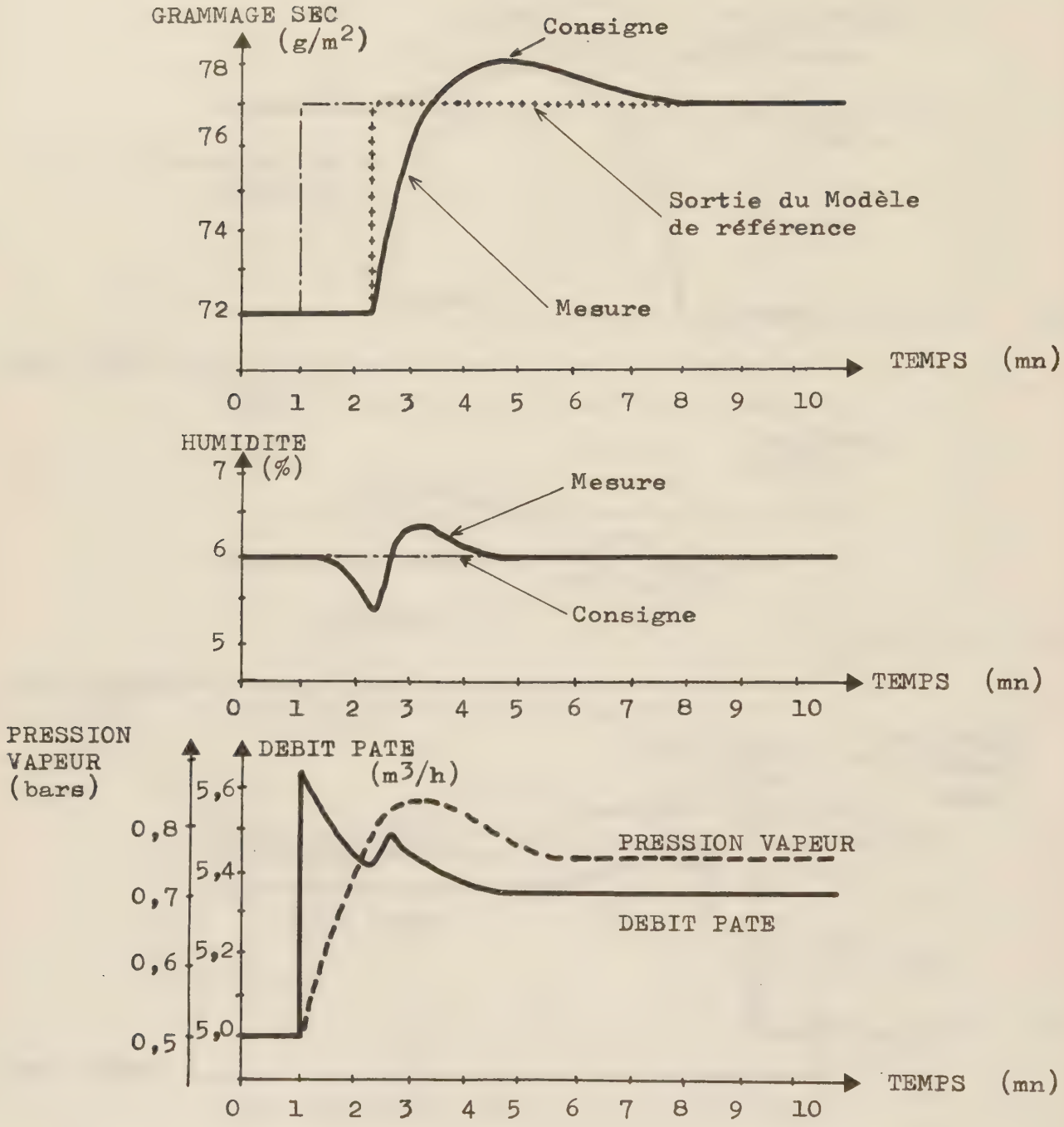


FIGURE 2.4.13 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC

CONSTANTE DE TEMPS T_{R1} DU MODELE DE REFERENCE = 0

Cette étude succinte fait assez nettement apparaître les possibilités offertes par l'emploi d'un modèle de référence. Sans altérer les performances de la commande en réaction, l'allure de la réponse à un changement de consigne est aisément modifiée à partir de la structure du processus générant les sorties désirées. Même en imposant au système une accélération importante par rapport à son fonctionnement en boucle ouverte, les performances demeurent très satisfaisantes : l'évolution de la mesure de grammage est toujours proche de la trajectoire souhaitée, et les variations transitoires de l'humidité restent inférieures à 0,6 % environ, valeur limite atteinte lorsque la sortie du modèle de référence est simplement un échelon retardé.

Par ailleurs, les amplitudes des deux grandeurs d'action sont tout à fait compatibles avec une application à un procédé réel, comme le montrent les figures relatives aux différents cas envisagés.

2.4.2. Etude de la compensation des perturbations mesurables

Nous avons également cherché à illustrer en simulation l'efficacité de la structure de commande destinée à la compensation des perturbations mesurables. Nous avons pour cela adopté de nouveau comme exemple le modèle dynamique représentant le grammage et l'humidité du papier en fonction du débit d'alimentation en pâte et de la pression de vapeur en post-sècherie, en lui adjoignant un bloc de transfert supplémentaire liant l'humidité à la pression de vapeur en pré-sècherie. C'est donc cette dernière grandeur, jusqu'alors supposée invariante, qui est considérée comme une perturbation mesurable intervenant sur le système.

2.4.2.1. Efficacité de la compensation

Les différentes expérimentations réalisées sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier nous ont conduits à adopter, pour représenter l'influence de la pression de vapeur en pré-sècherie sur l'humidité de la feuille dans l'étude envisagée, une fonction de transfert du premier ordre avec un retard pur :

$$G(p) \simeq \frac{Km.\ e^{-30p}}{1+70.p} \qquad (2.4.1.)$$

Le gain Km, négatif, est de l'ordre de - 30 % d'eau par bar dans les conditions de fonctionnement considérées.

Avec la période d'échantillonnage de 15 secondes retenue pour l'ensemble du modèle, la forme discrète correspondante utilisée pour le calcul de la commande est donnée par l'expression :

$$G^*(z) \simeq Km.\ \frac{(1-a_m)\ z^{-3}}{1-a_m\ z^{-1}} \qquad (2.4.2.)$$

avec $a_m = e^{-15/70}$

.../...

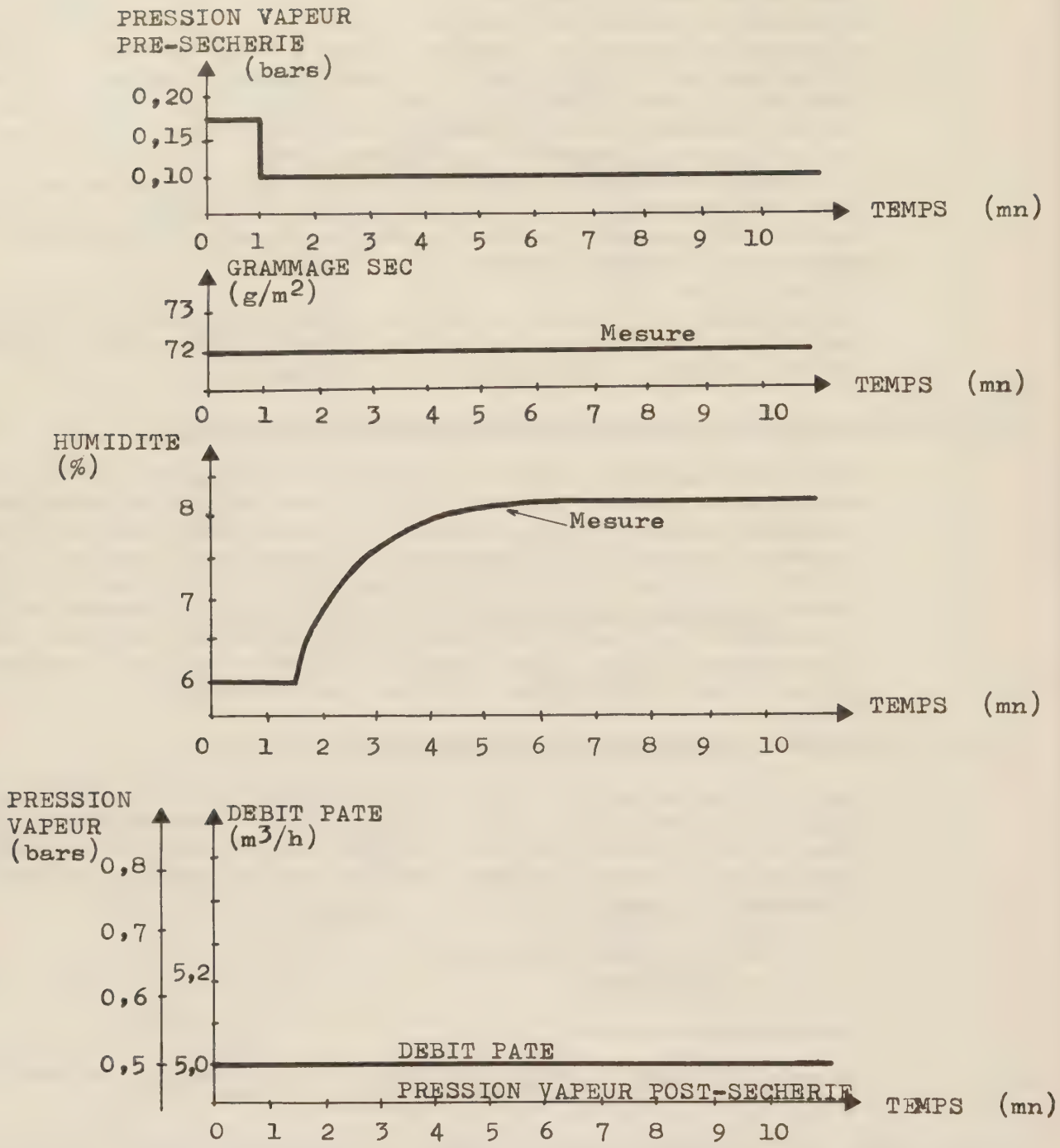


FIGURE 2.4.14 REPONSE A UNE MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE OUVERTE

La figure 2.4.14. montre l'influence sur le système en boucle ouverte d'un changement en échelon égal à - 70 millibars de la pression de vapeur en pré-sècherie. Pour nous rapprocher des conditions habituellement rencontrées sur l'unité pilote de Centre Technique du Papier nous avons, pour la présentation des différents graphes relatifs à cette étude, supposé que l'échelon considéré s'effectue entre 0,170 et 0,100 bar.

Une telle variation de la pression de vapeur en pré-sècherie se traduit finalement par une augmentation de la valeur de l'humidité un peu supérieure à 2 %. Il faut noter que, bien évidemment, l'autre sortie du modèle multidimensionnel, c'est à dire le grammage sec, ne subit aucune modification.

La figure 2.4.15. présente le comportement du système commandé par une structure multidimensionnelle ne comportant pas les éléments spécifiques assurant la compensation des perturbations mesurables.

Le vecteur d'action $\vec{u}^*(i)$ est donc alors de la forme :

$$\vec{u}^*(i) = - [L] \vec{x}(i) - [M] \vec{v}(i) + [P] \vec{s}(i) + [N] \vec{z}$$

Les différents éléments qui le composent sont les mêmes que pour les cas envisagés aux § 2.4.1.1. et 2.4.1.2., mais il convient de remarquer que les termes $[P].\vec{s}(i)$ et $[N].\vec{z}$ n'ont maintenant aucune influence puisque nous supposons les consignes constantes pour cette étude.

Il apparaît sur la figure considérée que la commande multidimensionnelle en réaction réalise la compensation de la perturbation dans des conditions très satisfaisantes compte tenu de la dynamique des différents éléments composant le système. En particulier, le découplage se révèle parfait puisque le débit de pâte, et par suite le grammage sec, ne subissent aucune altération transitoire appréciable. Il n'en reste pas moins cependant, que l'humidité, avant de rejoindre son point de consigne, présente une variation pouvant dépasser 1% à son maximum.

Or la figure 2.4.16. montre qu'il est assez facile d'améliorer considérablement le fonctionnement du système,en utilisant les éléments anticipatifs précédemment définis pour compenser les perturbations mesurables. L'expression du vecteur d'action complet est alors :

$$\vec{u}^*(i) = - [L] \vec{x}(i) - [M] \vec{v}(i) + [P] \vec{s}(i) + [N] \vec{z} - [T] \vec{\zeta}(i) - [W] \vec{\pi}$$

D'après la forme adoptée pour la fonction de transfert discrète (2.4.2.) liant la pression de vapeur en pré-sècherie à l'humidité, le vecteur d'état complémentaire $\vec{\zeta}(i)$ est de dimension 3, le vecteur $\vec{\pi}$ étant évidemment réduit à un seul élément.

.../...

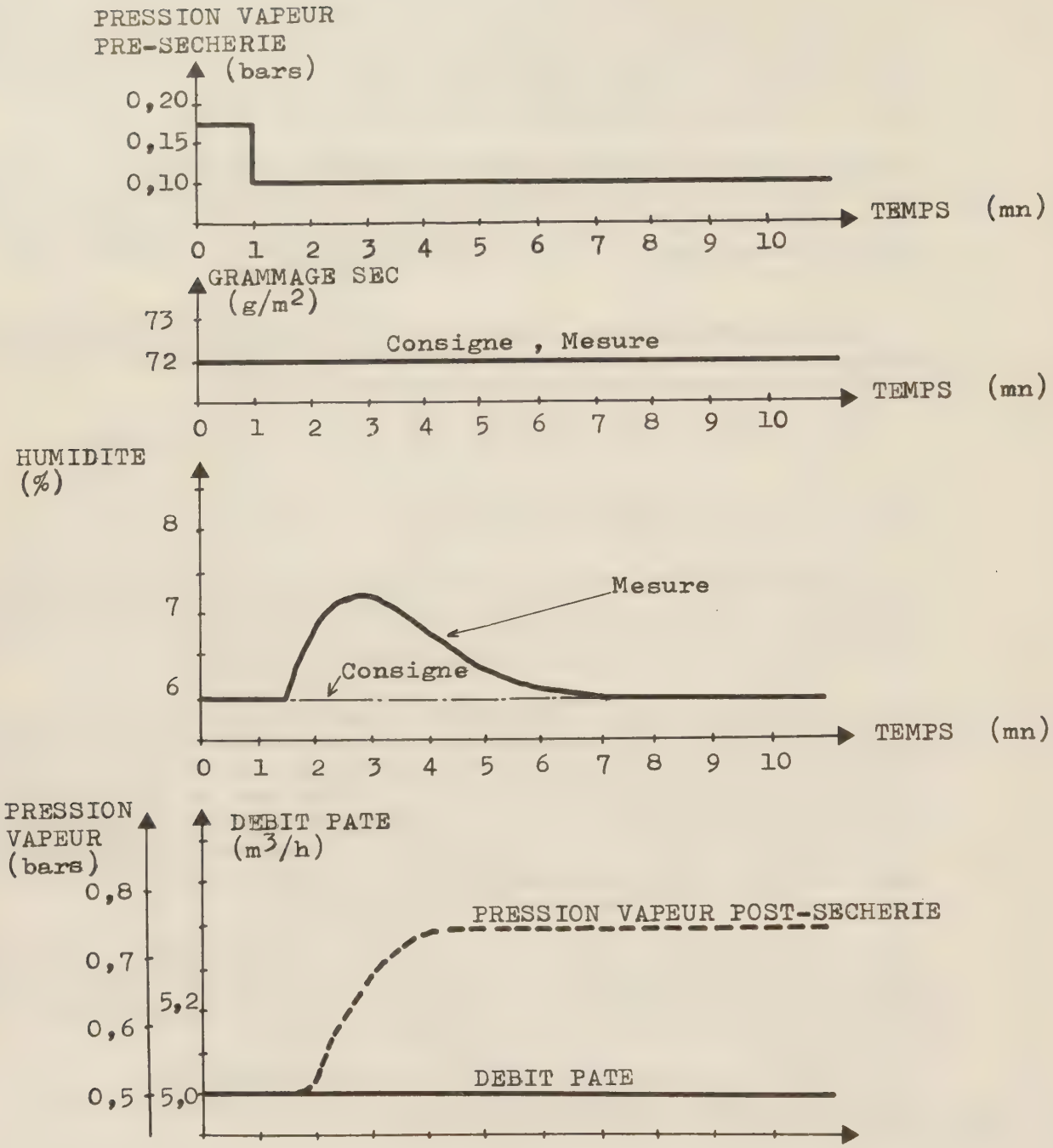


FIGURE 2.4.15 REPONSE A UNE MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE FERMEE, SANS LA STRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES

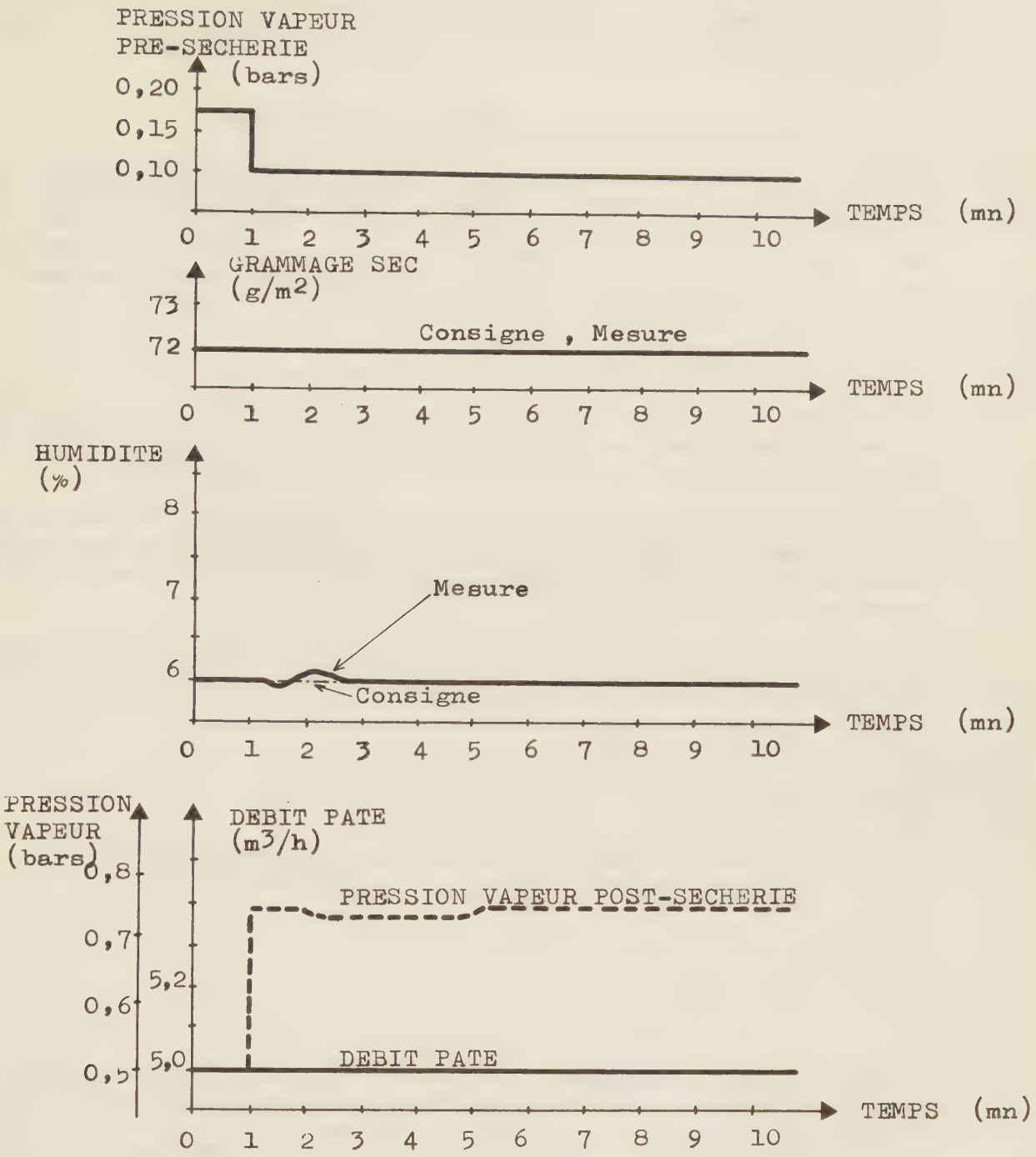


FIGURE 2.4.16 REPONSE A UNE MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE,EN BOUCLE FERMEE,AVEC LA STRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES

Cette structure de commande semble être en simulation particulièrement efficace,puisque la variation transitoire engendrée sur l'humidité devient pratiquement négligeable alors que le découplage est parfaitement conservé.

2.4.2.2. *Sensibilité à la connaissance des paramètres*

Comme nous l'avons déjà mentionné au § 2.3.3.3., la réalisation d'un estimateur global pour approcher le vecteur d'état complet constitué par $\vec{x}(i)$ et $\vec{\zeta}(i)$ ne peut pas être décomposée de manière simple. Pour ne pas compliquer la structure de cet estimateur, nous pensons qu'il est le plus souvent suffisant de calculer le vecteur d'état supplémentaire seulement à partir des équations d'état, c'est à dire par :

$$\vec{\zeta}(i+1) = [A_4]\ \vec{\zeta}(i) + [B_4]\ \vec{\pi}$$

Il convient de plus de vérifier au moins succintement qu'une connaissance imparfaite des paramètres de ce modèle ne nuit pas trop à l'efficacité de la structure de compensation des perturbations mesurables.

Nous avons dans ce but réalisé différentes simulations utilisant le vecteur de commande précédemment défini en modifiant les paramètres (constante de temps et gain) du modèle liant l'humidité et la pression de vapeur en pré-sècherie.

Le calcul des matrices de commandes [T] et [W] et l'estimation du vecteur d'état $\vec{\zeta}(i)$ sont donc effectués à partir du modèle identifié :

$$\begin{cases} \vec{\zeta}(i+1) = [A_4]\vec{\zeta}(i) + [B_4]\ \vec{\pi} \\ \vec{y}_4(i) = [C_4]\vec{\zeta}(i) \end{cases}$$

et nous supposons que la valeur de l'humidité est en réalité liée à la pression de vapeur en pré-sècherie par les équations d'état :

$$\begin{cases} \vec{\zeta}'(i+1) = [A'_4]\vec{\zeta}'(i) + [B'_4]\ \vec{\pi} \\ \vec{y}'_4(i) = [C'_4]\vec{\zeta}'(i) \end{cases}$$

Le premier cas de désadaptation envisagé est illustré par les figures 2.4.17. et 2.4.18. La constante de temps réelle est supposée égale à 110 secondes et la valeur du gain à - 20 % par bar (au lieu de 70 secondes et - 30 % par bar). Cet exemple concerne donc l'éventualité d'une influence réelle de la pression en pré-sècherie sur l'humidité moins importante et plus lente que celle qui est caractérisée par le modèle identifié.

L'action sur le système est toujours, comme au § 2.4.2.1., une variation en échelon égale à - 70 millibars de la pression de vapeur en pré-sècherie.

.../...

La figure 2.4.17. est relative à l'utilisation de la commande multidimensionnelle en réaction seule pour assurer le retour de l'humidité à sa valeur de consigne. La figure 2.4.18., par contre, représente l'emploi de l'action prédictive pour compenser la perturbation mesurable considérée.

Malgré une désadaptation des paramètres relativement importante, ce type de commande se révèle donc encore d'une très bonne efficacité puisque la variation transitoire de l'humidité ne dépasse pas 0,5 % en valeur absolue.

Le second exemple, illustré par les figures 2.4.19. et 2.4.20., suppose que l'action réelle de la pression de vapeur en pré-sècherie sur l'humidité est plus rapide et plus importante que ne le traduit le modèle adopté. Pour ces simulations, le gain correspondant est en effet pris égal à - 40 % par bar et la constante de temps à 40 secondes (au lieu de - 30 % par bar et 70 secondes pour le modèle).

En comparaison de la figure 2.4.19. se rapportant à l'emploi de la commande multidimensionnelle en réaction seule, la figure 2.4.20. souligne bien l'intérêt que présente encore la structure de compensation des perturbations mesurables : l'écart transitoire entre la valeur de l'humidité et sa consigne est toujours maintenu inférieur à 1 % (en boucle ouverte, il serait de 2,8 % en régime permanent).

Il nous semble donc finalement que la méthode simplifiée utilisée pour obtenir le vecteur d'état complémentaire $\vec{\zeta}(i)$ est bien justifiée par les différents essais réalisés en simulation, parmi lesquels nous avons choisi de présenter les deux exemples précédents. Même lorsque le modèle liant les perturbations mesurables aux sorties n'est pas connu avec une grande précision, la structure de commande complète proposée demeure d'une efficacité très satisfaisante. Elle conserve par ailleurs des caractéristiques parfaitement admissibles pour une utilisation industrielle.

.../...

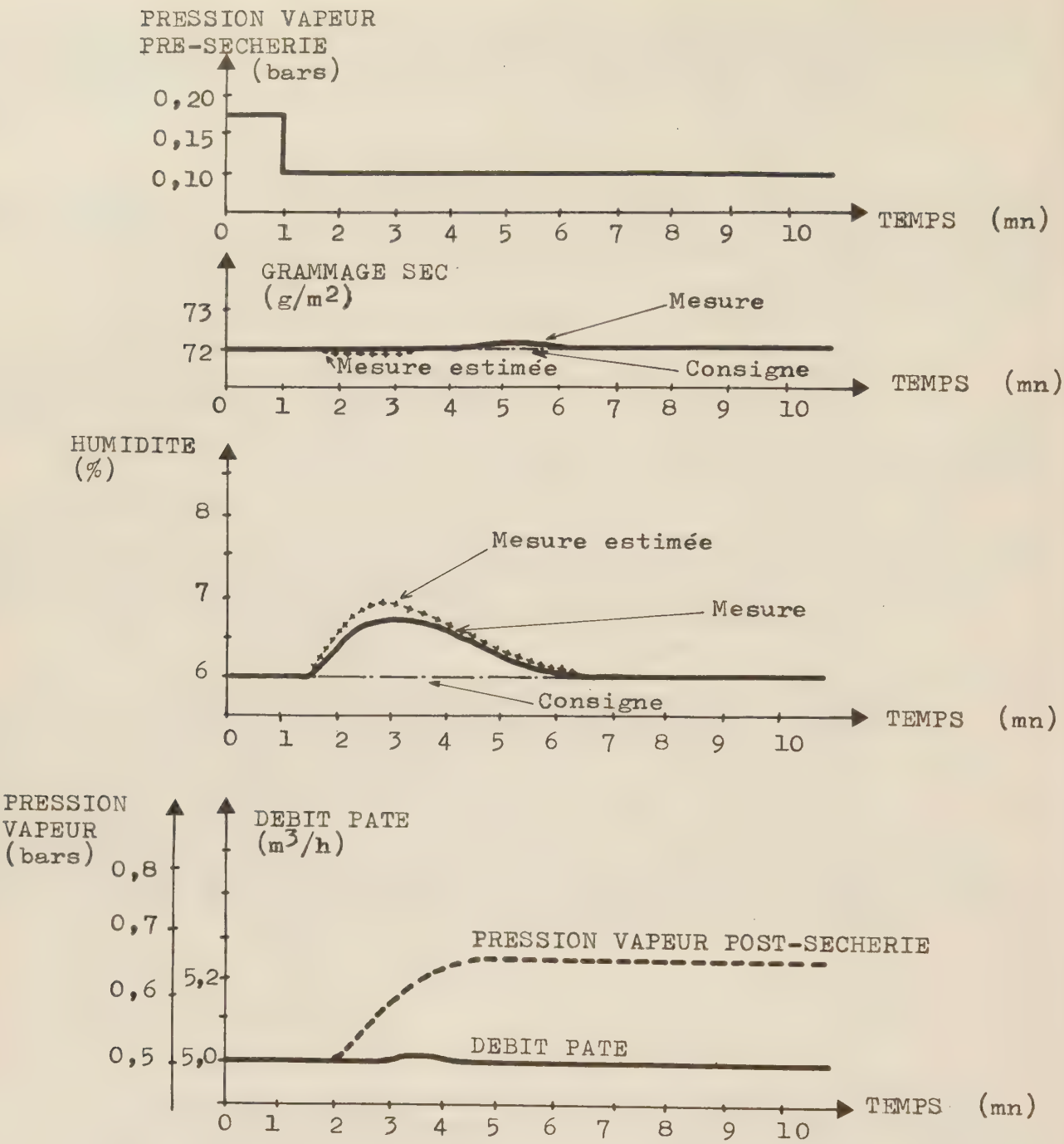


FIGURE 2.4.17 REPONSE A UNE MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE FERMEE, SANS LA SRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES (1er CAS DE DESADAPTATION)

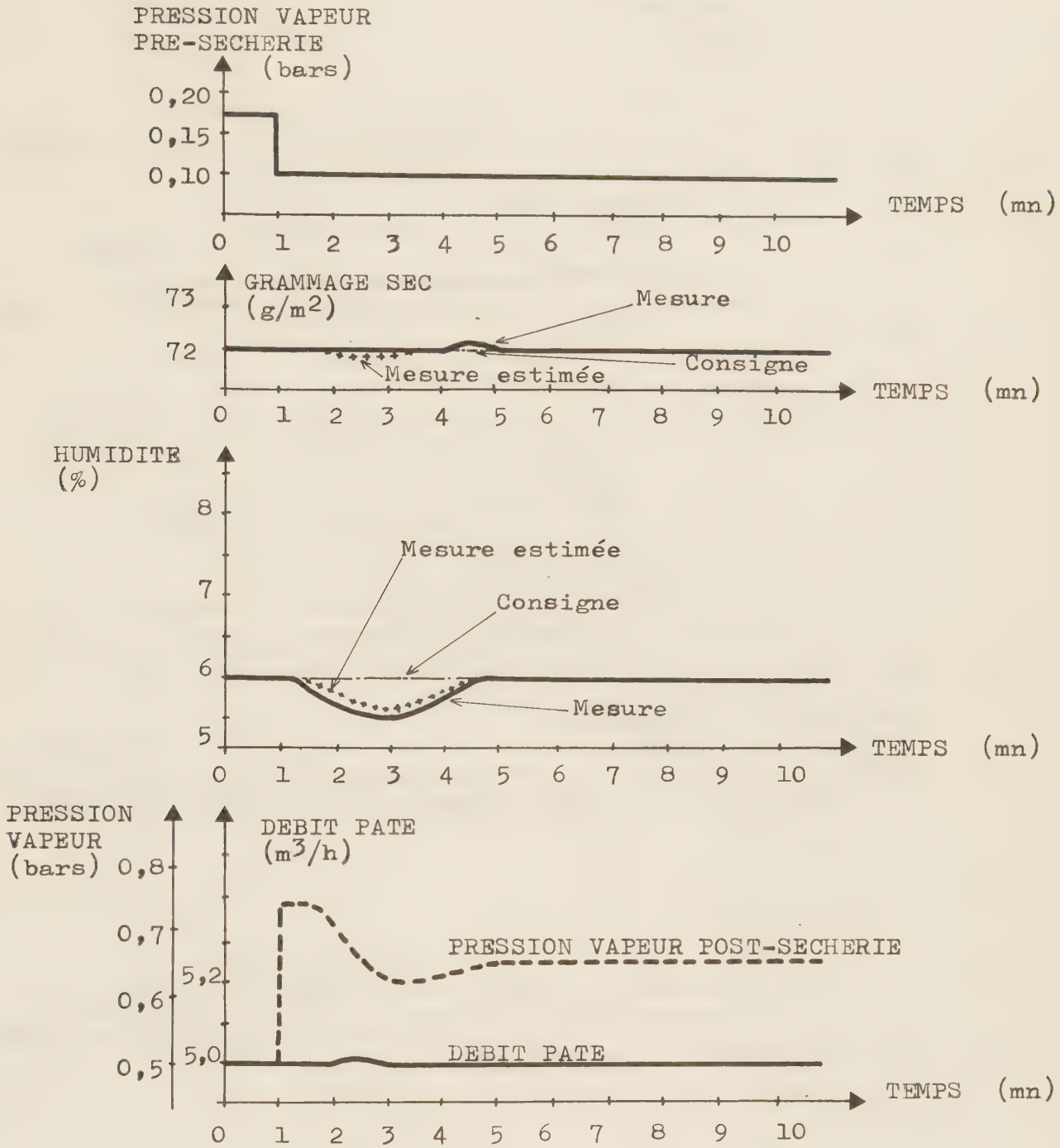


FIGURE 2.4.18 REPONSE A UNE MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE FERMEE, AVEC LA STRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES (1er CAS DE DESADAPTATION)

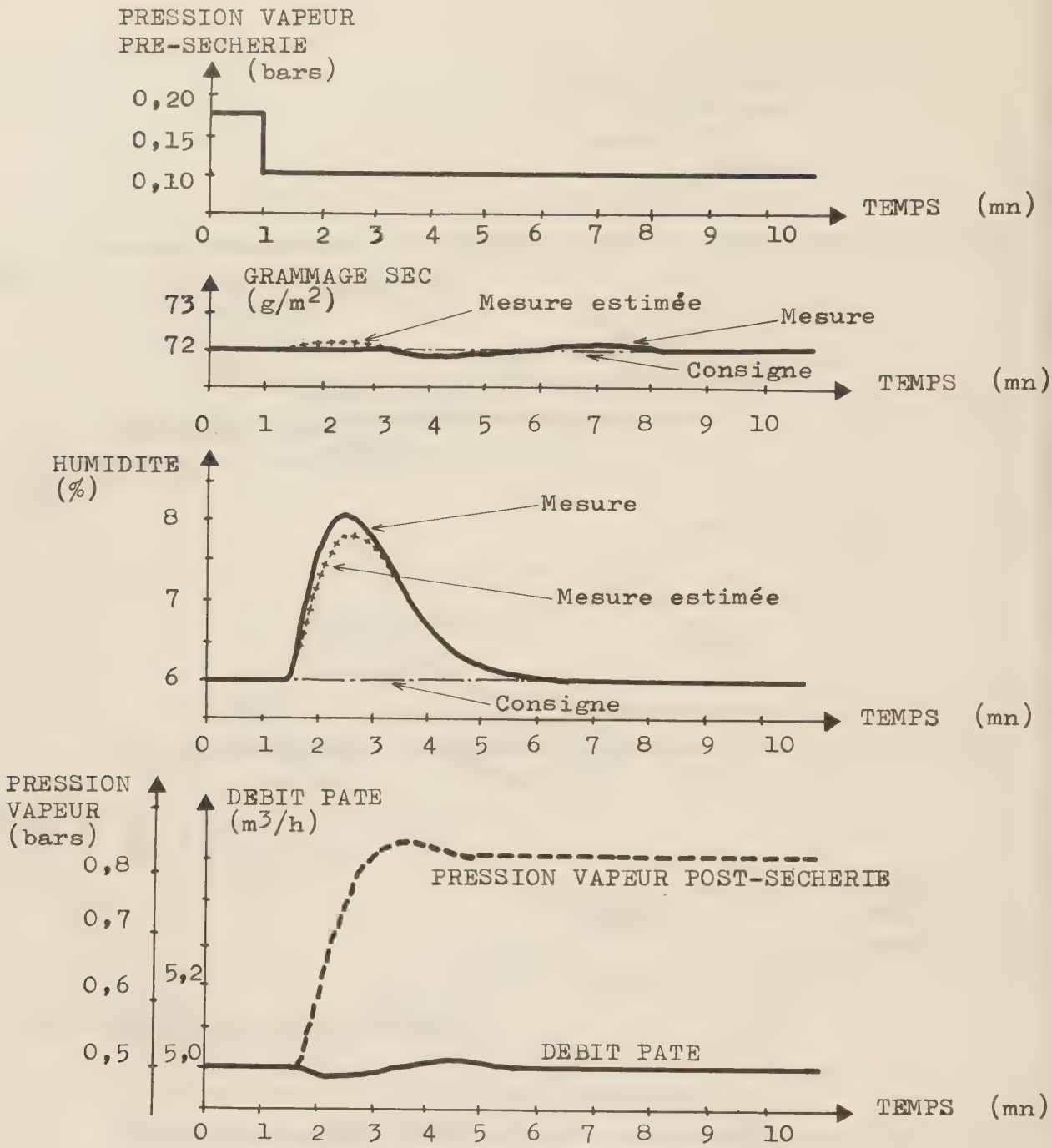


FIGURE 2.4.19 REPONSE A UNE MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE FERMEE, SANS LA STRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES ($2^{ème}$ CAS DE DESADAPTATION)

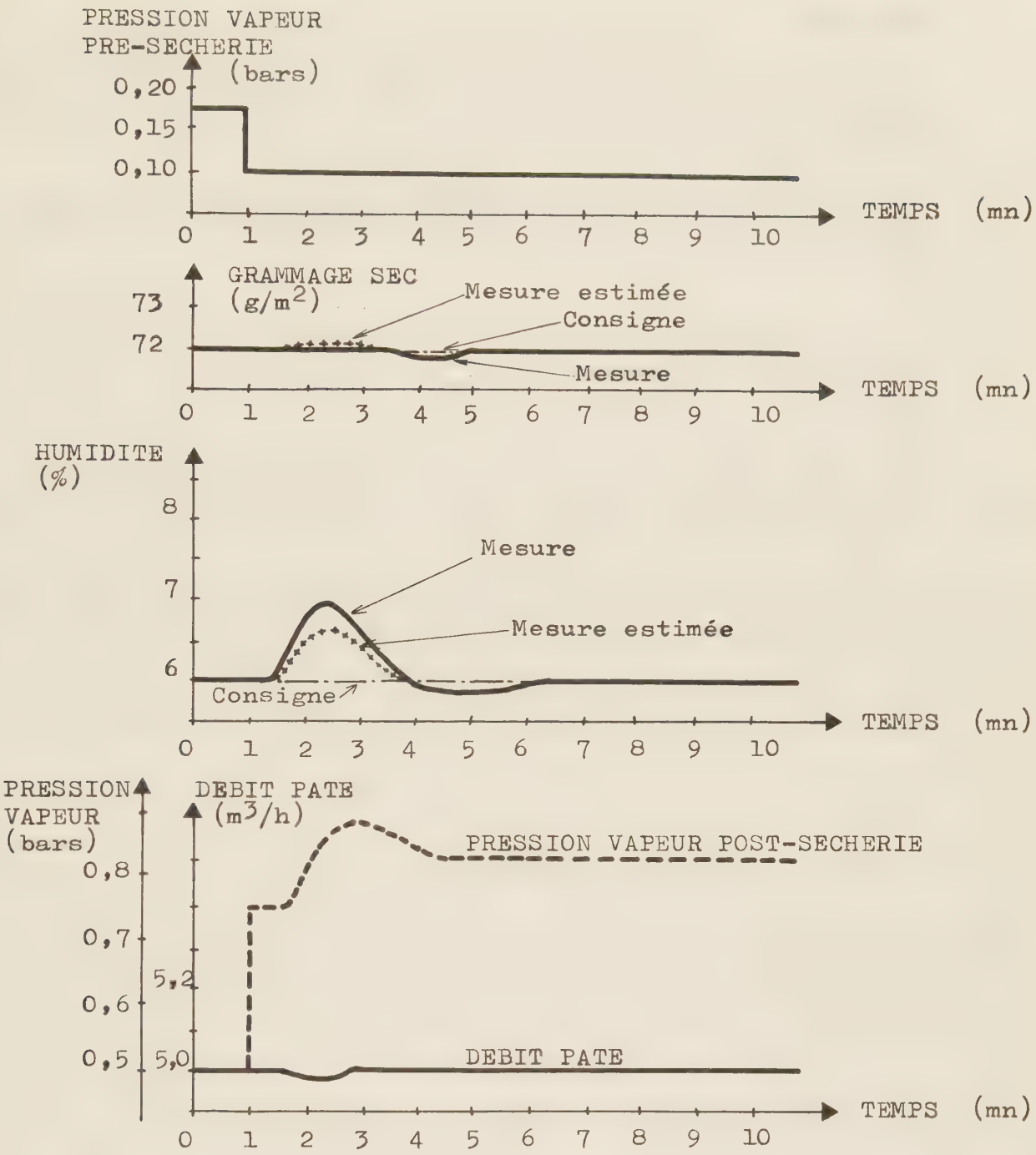


FIGURE 2.4.20 REPONSE A UNE MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE FERMEE, AVEC LA STRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES (2ème CAS DE DESADAPTATION)

2.5. CONCLUSIONS

La prise en compte d'un modèle de référence dans le calcul de la commande multidimensionnelle en améliore notablement les performances pour les changements de consignes, permettant une bonne séparation entre le problème de la régulation et le problème de l'asservissement.

Par ailleurs, il est possible d'utiliser aussi les mesures de certaines grandeurs,considérées comme des perturbations intervenant sur le système,pour les compenser plus efficacement.

Les études en simulation présentées illustrent bien, nous semble-t-il, les possibilités offertes par la structure de commande complète ainsi déterminée. Certains exemples concernent des conditions de fonctionnement relativement sévères, et n'en mettent donc que mieux en évidence les bons résultats obtenus.

Il ne faut cependant pas oublier que le but final demeure toujours l'application à des systèmes réels des méthodes développées. Très utiles pour une meilleure compréhension des phénomènes, les études en simulation ne sauraient à elles seules constituer une justification parfaite de la validité de la solution proposée. Les résultats très satisfaisants auxquels elles ont abouti sont néanmoins un test très probant que confirmeront par la suite les applications pratiques.

oOo

TROISIEME PARTIE

MISE EN OEUVRE DES COMMANDES SUR LA MACHINE A PAPIER EXPERIMENTALE DU CENTRE TECHNIQUE DU PAPIER

Les études relatives à l'identification et à la commande de diverses parties d'une machine à papier mettent très vite en évidence la présence de plusieurs sous-ensembles multidimensionnels. Un tel processus constitue en fait un domaine d'application particulièrement vaste et intéressant pour les différentes théories précédemment développées.

Sur l'Unité Pilote du Centre Technique du Papier, nous avons donc mis en oeuvre une structure d'action multidimensionnelle pour deux sous-systèmes permettant de définir certaines propriétés parmi les plus fondamentales de la feuille de papier fabriquée. Il s'agit d'une part de la commande du grammage sec et de l'humidité à partir du débit d'alimentation en pâte et de la pression de vapeur en post-sècherie, et d'autre part de la commande de la couleur par action sur les débits de trois colorants.

Pour chacun de ces systèmes, un estimateur-filtre fournit le vecteur d'état estimé et assure le filtrage des mesures.

3.1. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE DU GRAMMAGE ET DE L'HUMIDITE

Le modèle d'état discret utilisé pour cette application, tel qu'il est présenté au § 1.3.4.2., comporte deux grandeurs d'action (débit de pâte et pression de vapeur en post-sècherie) et deux sorties à commander : le grammage sec et l'humidité de la feuille de papier. Une troisième sortie intermédiaire, la concentration du mélange en caisse de tête, est également utilisée pour l'estimation du vecteur d'état.

La figure 3.1.1. rappelle la forme continue représentant le comportement dynamique du système au voisinage du principal point de fonctionnement considéré.

.../...

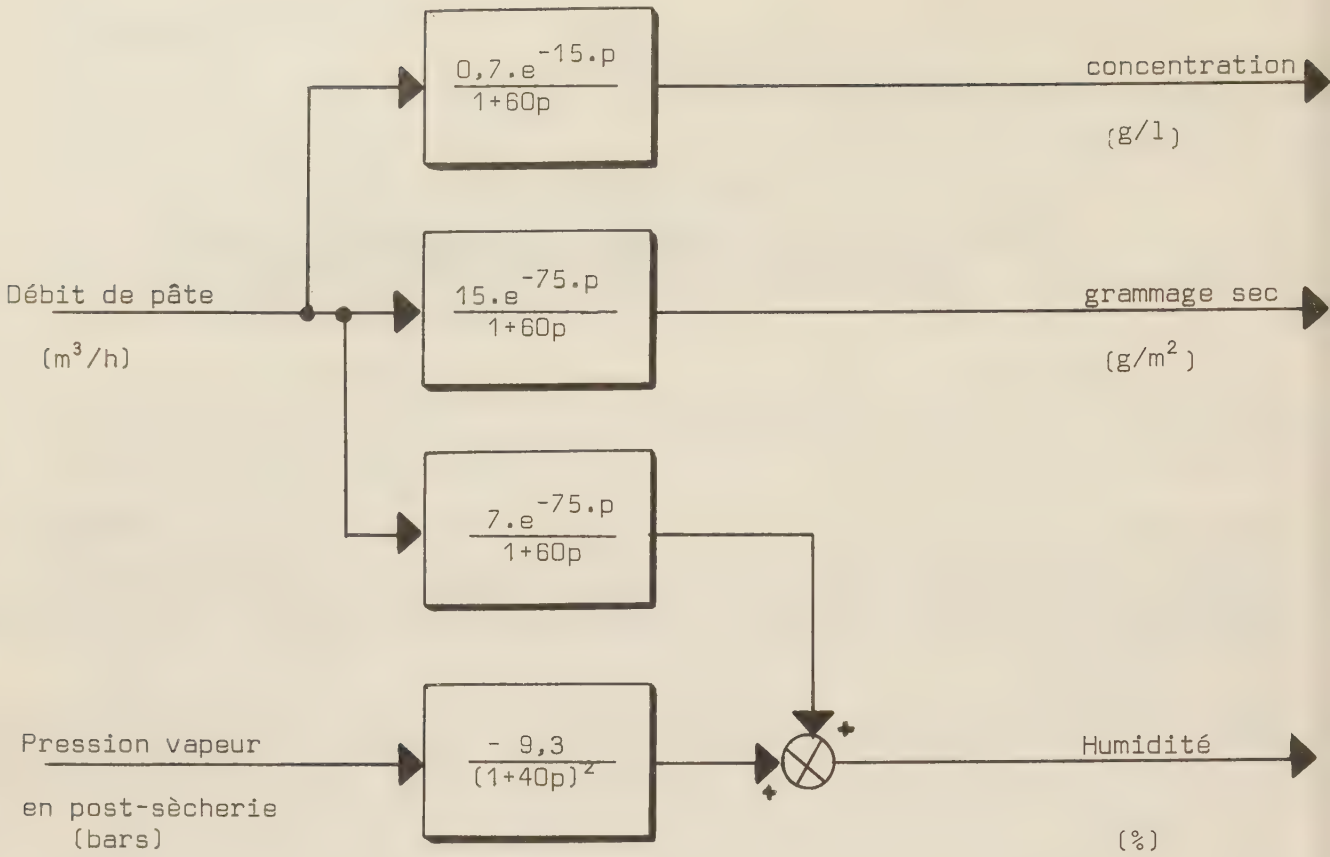


Figure 3.1.1. - SCHEMA GENERAL DU SYSTEME

Pour les différentes expérimentations correspondant aux résultats présentés, le domaine de variation du grammage sec est compris entre 70 et 80 g/m^2 et la valeur de l'humidité se situe entre 5 % et 8 % environ.

.../...

3.1.1. Changements des valeurs des consignes

Nous avons mis en oeuvre pour les changements de consigne du grammage sec ou de l'humidité la commande multidimensionnelle en asservissement définie au § 2.2.3.1. Le modèle de référence utilisé présente une dynamique comparable à l'évolution du système en boucle ouverte, comme l'indique la figure 3.1.2.

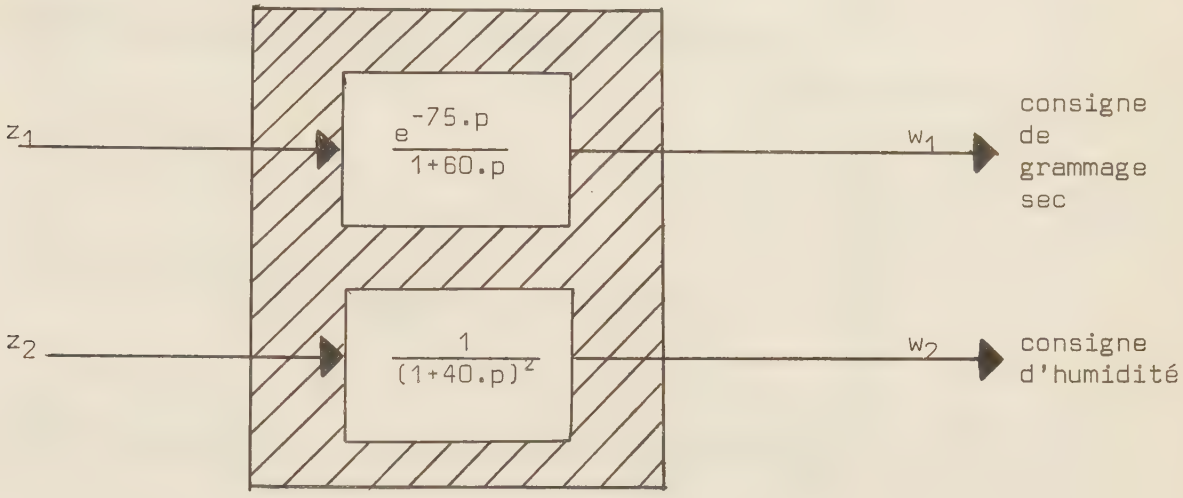


Figure 3.1.2. - MODELE DE REFERENCE

Avec la période d'échantillonnage de 15 secondes choisie, la représentation discrète correspondante comporte donc 8 variables d'état, comme le modèle du système lui-même.

Les matrices [L], [M], [P] et [N] intervenant dans l'expression du vecteur d'action ont ainsi pour dimensions respectives (2x8), (2x2), (2x8)et(2x2).

3.1.1.1. Changement de la consigne de grammage sec

Un exemple de changement de la consigne du grammage sec est illustré par la figure 3.1.3. La variation imposée à cette grandeur est de - 4g/m^2, entre 77 et 73 g/m^2. La consigne d'humidité est maintenue constante et égale à 6 %.

Il est intéressant de constater que ce changement de consigne s'effectue d'une manière tout à fait comparable au comportement théorique prévu par l'étude en simulation présentée au § 2.4.1.1. Le découplage entre les deux sorties se révèle en particulier très satisfaisant puisque la variation transitoire de l'humidité demeure pratiquement indiscernable du bruit habituellement attaché à cette grandeur.

.../...

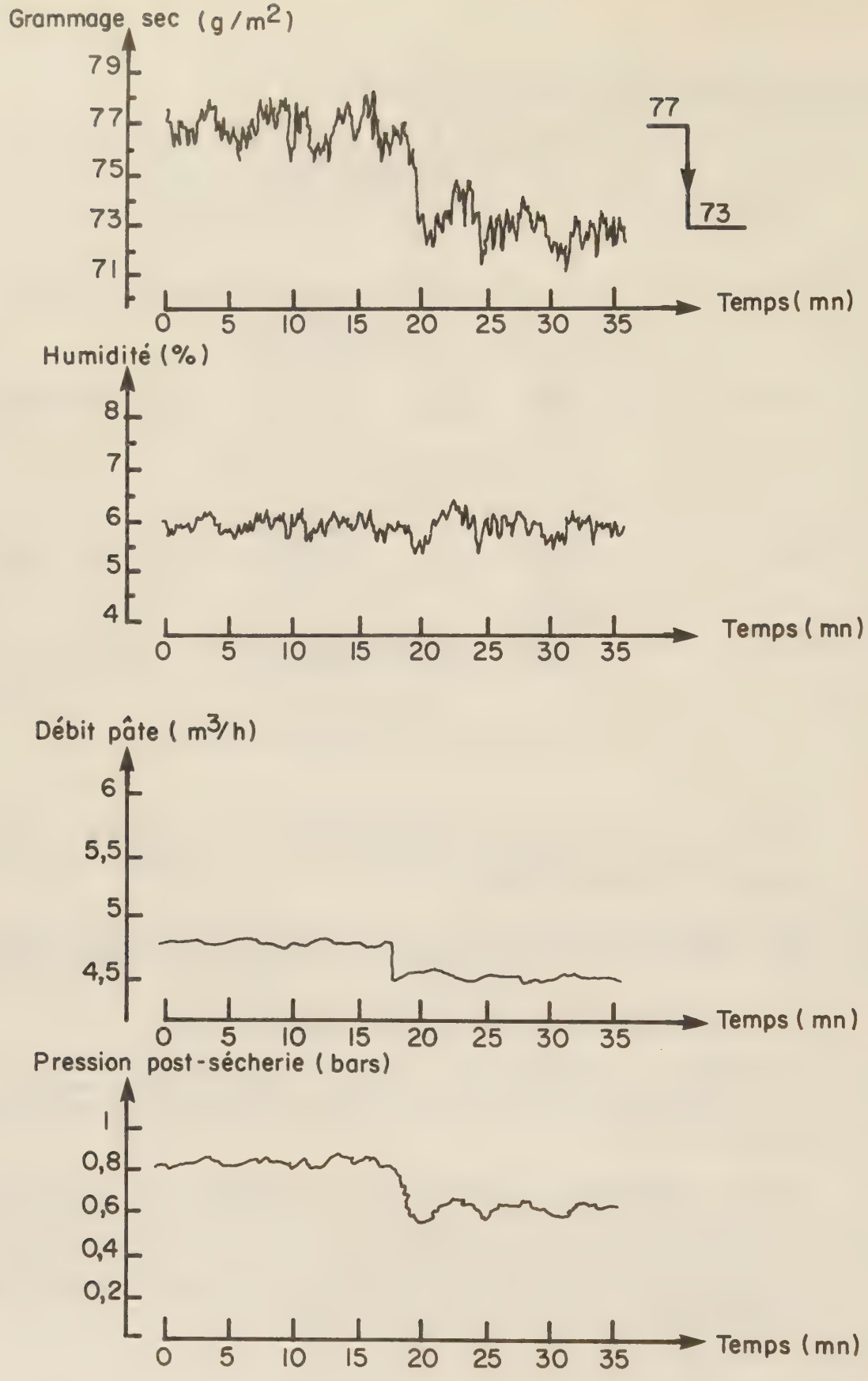


FIGURE 3-1-3 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE DE GRAMMAGE SEC

Par ailleurs, l'évolution du débit de pâte, voisine d'un échelon, est bien conforme au résultat attendu,compte tenu du choix effectué pour la dynamique du modèle de référence.

Il convient de remarquer qu'un tel changement de consigne n'a pas pû être réalisé avec une structure de commande sans modèle de référence, les variations instantanées alors imposées aux grandeurs d'action étant difficilement admissibles en pratique.

3.1.1.2. Changement de la consigne d'humidité

La figure 3.1.4. présente un changement de la valeur de consigne de l'humidité du papier en fin de machine. La variation désirée correspond à un passage de 6 % à 8 %, c'est à dire une augmentation de 2 % de la teneur en eau de la feuille. Il faut d'ailleurs remarquer, indépendamment du problème de la commande, que le comportement à court terme de cette grandeur se révèle en règle générale plus perturbé lorsque la valeur moyenne en est plus élevée.

Comme pour l'exemple précédent, l'évolution du système se révèle encore très similaire aux résultats obtenus en simulation au § 2.4.1.1. L'action destinée à modifier la valeur de l'humidité est bien effectuée sur la pression de vapeur en post-sècherie, le débit de pâte n'étant pas changé. La valeur moyenne du grammage sec demeure par suite constante et égale à la consigne demandée, c'est à dire 73 g/m^2. Il faut également noter que la variation très voisine d'un échelon de la pression de vapeur en post-sècherie traduit bien le choix réalisé pour la dynamique du modèle de référence.

3.1.1.3. Fonctionnement a grammage total constant

Le grammage total du papier, c'est à dire son poids réel par unité de surface, est une grandeur souvent utilisée dans l'industrie. La relation liant le grammage total G_t au grammage sec G et à l'humidité H est donnée par :

$$G_t = \left(\frac{100}{100-H}\right).G$$

où G_t et G sont exprimés dans la même unité (g/m^2) et H en %.

En régime permanent, la régulation du grammage sec et de l'humidité assure bien le maintien du grammage total à la valeur désirée. Il arrive cependant qu'il soit souhaitable de changer la valeur de la teneur en eau de la feuille sans modifier son poids total par unité de surface.

Il faut alors changer également la valeur de consigne du grammage sec.

.../...

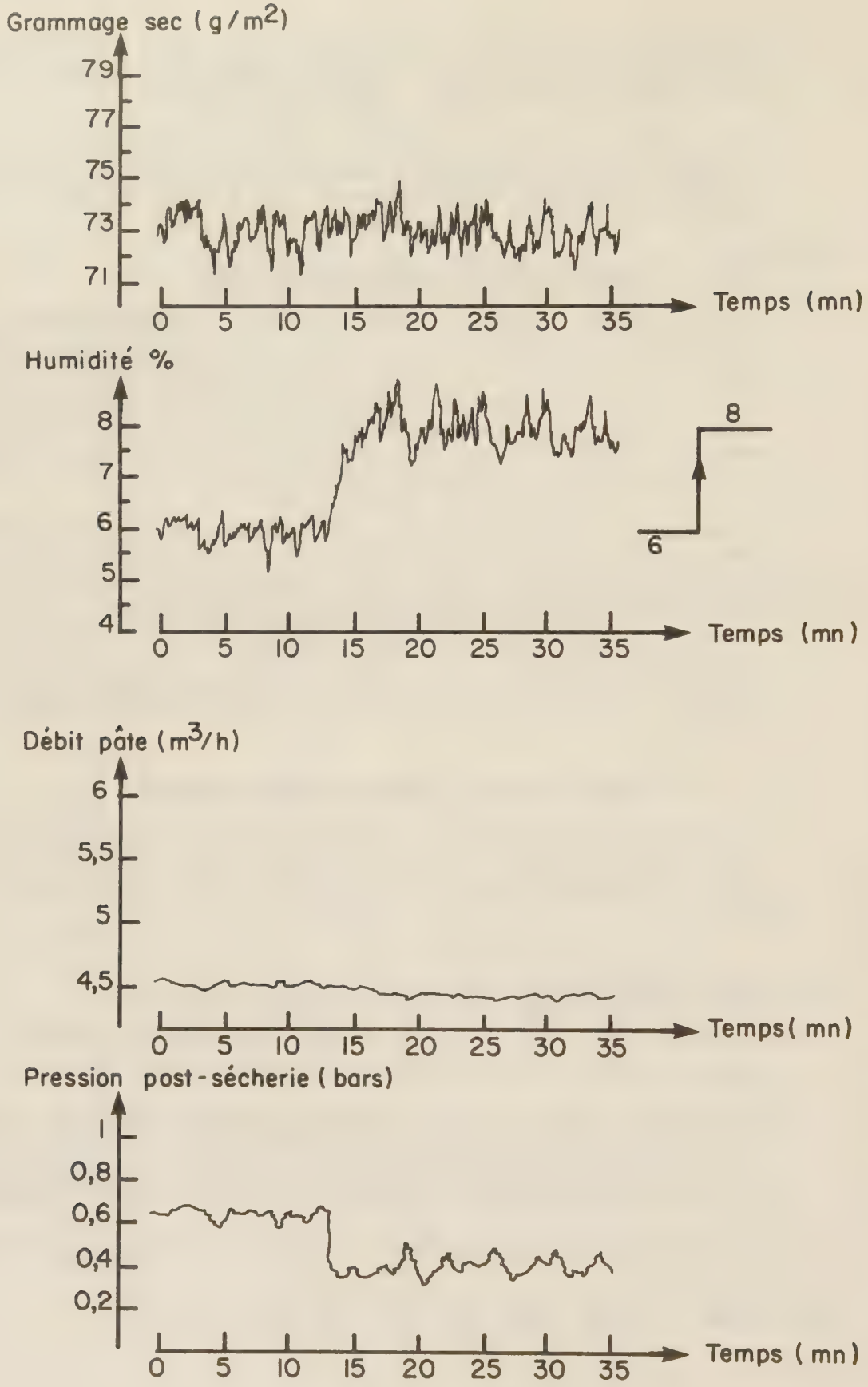


FIGURE 3-I-4 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE D'HUMIDITE

Nous avons pour cela adjoint au système de commande multidimensionnel un module très simple permettant, éventuellement, de fixer la consigne de grammage sec G_c à partir des consignes de grammage total G_{tc} et d'humidité H_c :

$$G_c = (1 - \frac{H_c}{100}) \cdot G_{tc}$$

Si ce mode de fonctionnement est choisi, un changement de consigne sur l'humidité est toujours accompagné d'un changement de consigne adéquat sur le grammage sec, de manière à vérifier la relation précédente.

La figure 3.1.5. présente à titre d'exemple une modification de 6 % à 8 % de la valeur désirée pour l'humidité, la consigne de grammage total demeurant constante et égale à 81,4 g/m^2. Le point de consigne du grammage sec est ainsi changé en conséquence et passe de 76,5 à 74,9 g/m^2.

Il est à signaler qu'un tel mode de fonctionnement ne fixe aucune condition pour le comportement transitoire du grammage total, mais ceci n'est guère gênant en pratique. De toute façon, cette grandeur retrouve sa valeur imposée au plus tard à la fin des évolutions du grammage sec et de l'humidité, dont il est toujours possible de modifier les allures en fonction des performances souhaitées.

3.1.2. Réponses à différentes perturbations

Processus faisant intervenir de multiples phénomènes, la fabrication de la feuille de papier est constamment influencée par de nombreuses perturbations.

Pour pouvoir apprécier le comportement de la structure de commande, il est cependant généralement nécessaire de provoquer volontairement certaines de ces perturbations en leur donnant des amplitudes connues et suffisantes pour exciter correctement le procédé. Sinon, il est en effet toujours difficile de distinguer les uns des autres les différents éléments considérés comme sources de perturbations.

3.1.2.1. Perturbation dans les circuits de tête de machine

De manière très schématique, les circuits de tête d'une machine à papier peuvent être assimilés à un mélange, effectué en continu, d'une certaine quantité de pâte et d'une certaine quantité d'eau blanche.

Les deux types de grandeurs déterminant la masse de fibres envoyée sur la toile de la machine par unité de temps sont donc des débits et des concentrations.

Les débits de pâte et d'eau blanche provenant de châteaux à niveaux constants sont munis d'asservissements numériques locaux rapides et très efficaces. Il apparaît donc peu probable, sur l'unité pilote, que ces deux débits soient soumis à des variations importantes en fonctionnement normal.

.../...

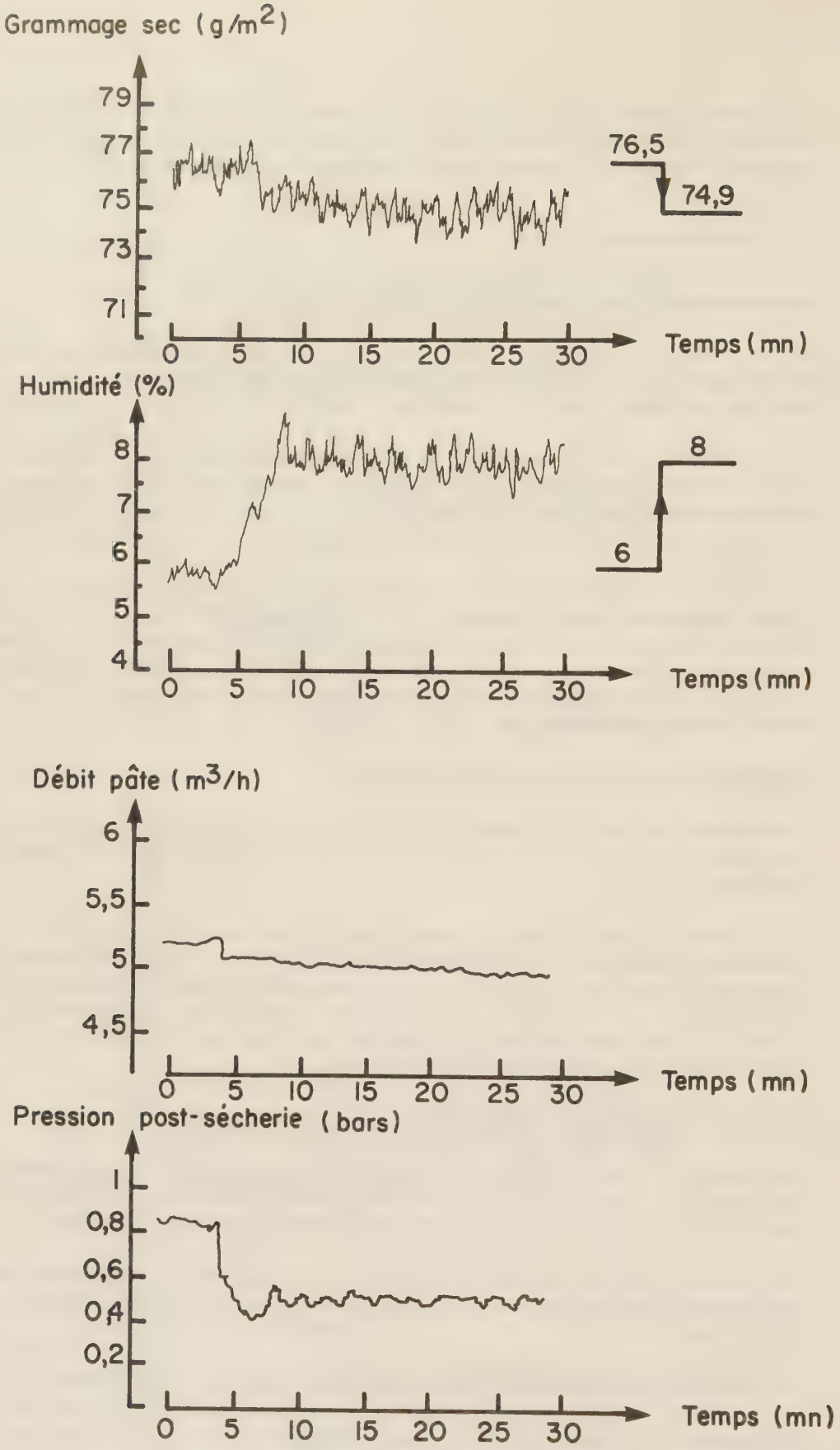


FIGURE 3-1-5 CHANGEMENT DE LA CONSIGNE D'HUMIDITE A GRAMMAGE TOTAL CONSTANT

Il est néanmoins intéressant de provoquer de telles perturbations qui constituent l'un des moyens, très simple, d'apprécier les performances des boucles de réactions de la commande multidimensionnelle.

Les figures 3.1.6. et 3.1.7. sont relatives à ce type de perturbations imposées aux débits d'alimentation de la machine à papier expérimentale.

Avec le mode de fonctionnement choisi pour le système, c'est à dire à débit total constant, nous avons donc également pour ces essais accompagné toute variation volontaire + ΔQ du débit de pâte d'une variation - ΔQ du débit d'eau blanche. Cette condition sera par conséquent toujours sous-entendue.

La figure 3.1.6. illustre deux modifications successives des débits effectuées en boucle ouverte. Les amplitudes de ces échelons ont respectivement comme valeurs + 0,25 m^3/h et - 0,25 m^3/h pour le débit de pâte. La figure 3.1.7. représente la compensation par la structure de régulation multidimensionnelle d'une perturbation correspondant à un changement de + 0,25 m^3/h du débit de pâte.

La comparaison de ces deux figures met bien en évidence, nous semble-t-il, l'efficacité de la commande proposée qui permet un retour rapide aux points de consignes, tant pour le grammage sec que pour l'humidité.

Une deuxième sorte de perturbations pouvant apparaître dans les circuits de tête d'une machine à papier concerne les concentrations. En particulier, la concentration de la pâte épaisse est une grandeur qu'il est souvent difficile de maintenir constante malgré les régulations locales utilisées dans ce but. Pour apprécier la réponse de la commande multidimensionnelle à de telles sollicitations, nous avons donc provoqué, sur l'unité pilote, une variation de la concentration de la pâte épaisse en changeant le point de consigne du régulateur analogique local.

La figure 3.1.8. présente la réponse du grammage sec et de l'humidité en boucle ouverte pour deux changements successifs de la concentration de pâte épaisse. Il convient de noter que ces changements ne s'effectuent pas sous forme d'échelons, la boucle locale de régulation possédant en effet une dynamique non négligeable. L'écart constaté sur le grammage sec est d'environ 4 g/m^2, et la valeur statique moyenne de l'humidité subit un décalage de l'ordre de 2 %.

La figure 3.1.9. illustre la compensation d'une perturbation de même amplitude par la structure de commande multidimensionnelle. Les variations transitoires du grammage sec et de l'humidité ont alors pour valeurs respectives 2 g/m^2 et 0,5 % environ. Il faut souligner à ce propos que la prise en compte par l'estimateur de la mesure de la concentration en caisse de tête est dans ce cas un facteur très important de la qualité de la compensation. Il est en effet ainsi possible de détecter la perturbation bien avant qu'elle n'apparaisse sur les mesures du grammage sec et de l'humidité. Le régime permanent est retrouvé après 6 à 7 minutes environ.

.../...

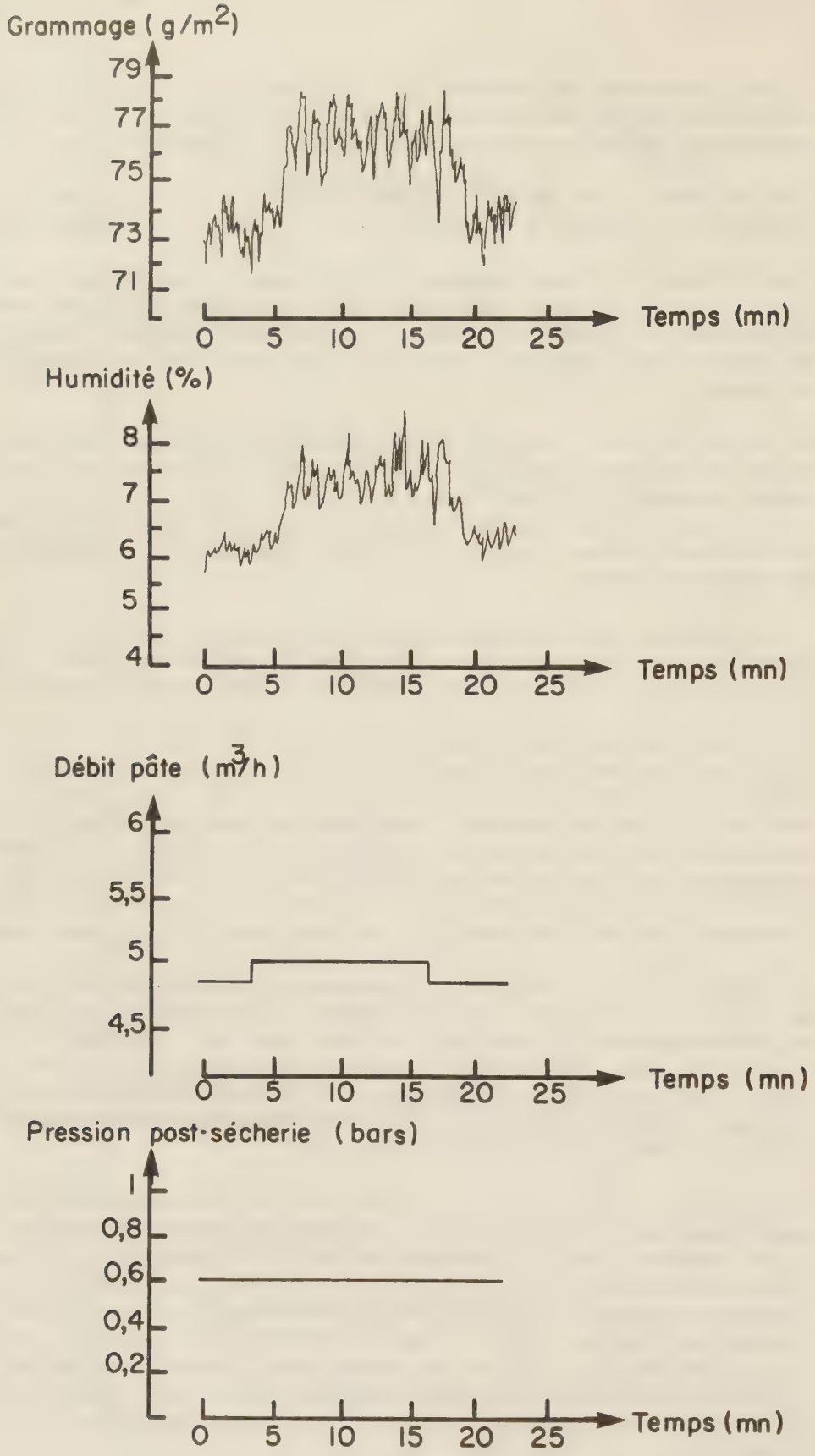


FIGURE 3-1-6 PERTURBATIONS SUR LES DEBITS D'ALIMENTATION EN BOUCLE OUVERTE

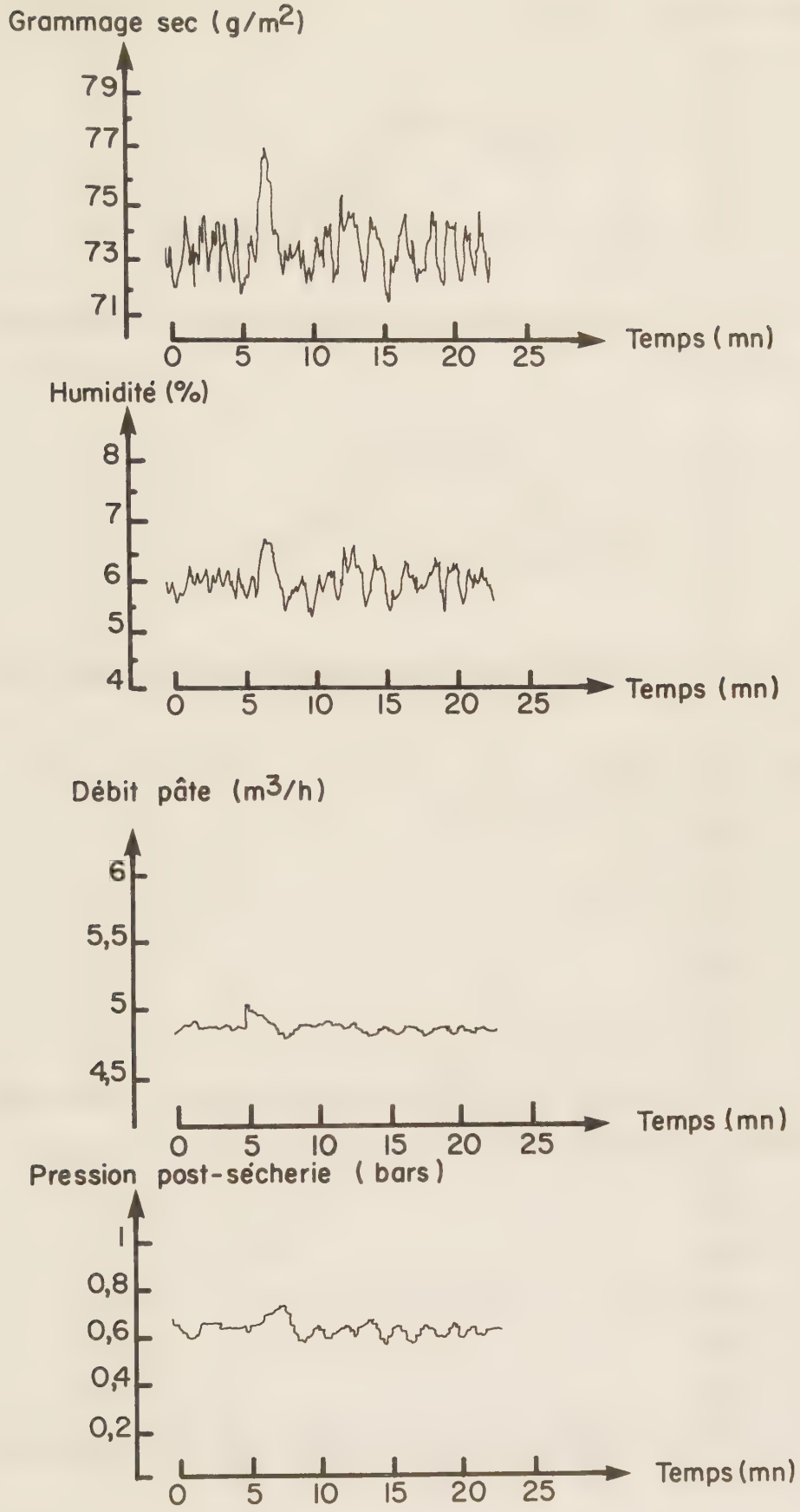


FIGURE 3-1-7 PERTURBATIONS SUR LES DEBITS D'ALIMENTATION AVEC LA REGULATION MULTIDIMENSIONNELLE

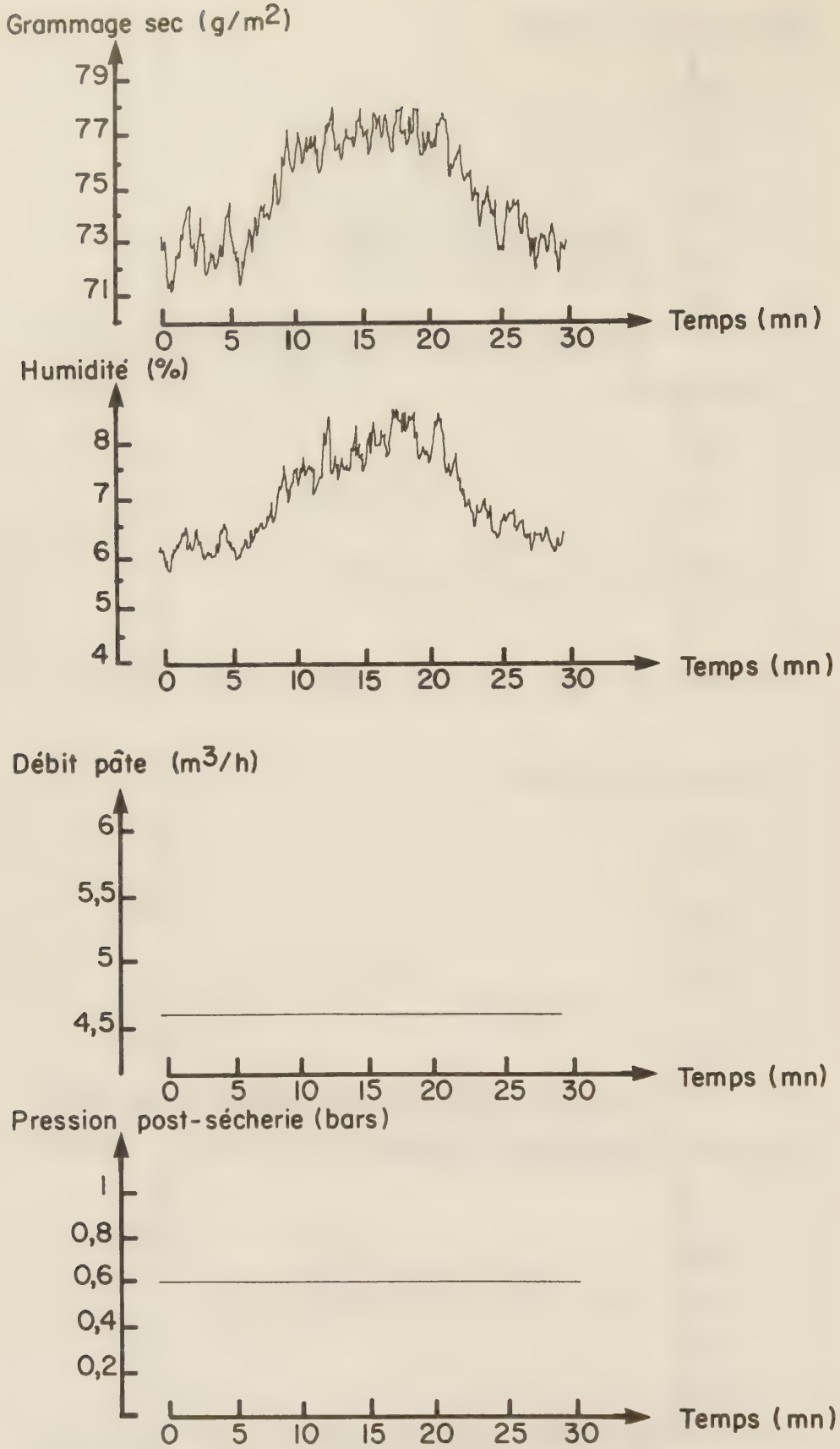


FIGURE 3-1-8 PERTURBATIONS SUR LA CONCENTRATION DE LA PATE EPAISSE EN BOUCLE OUVERTE

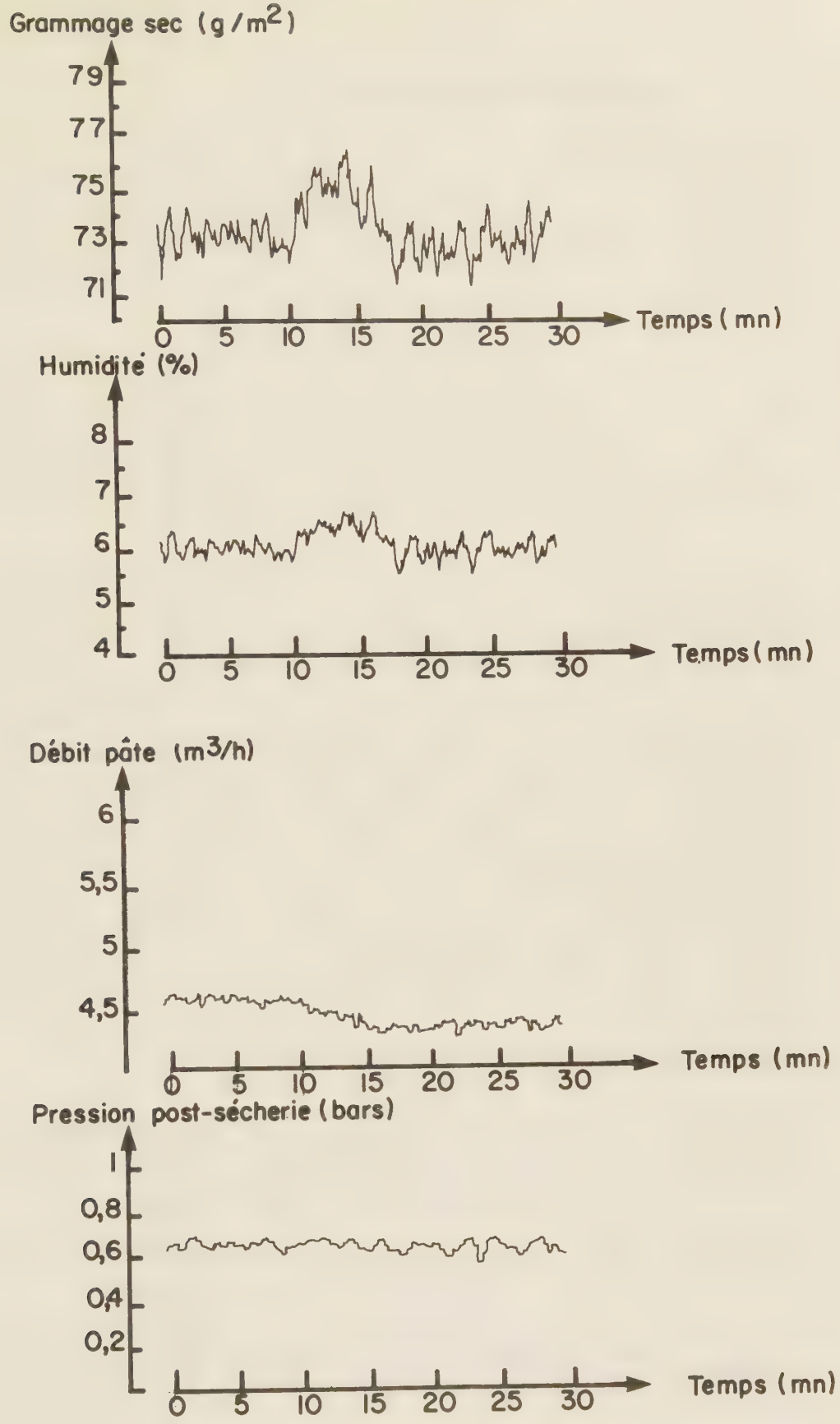


FIGURE 3-1-9 PERTURBATION SUR LA CONCENTRATION DE LA PATE EPAISSE AVEC LA REGULATION MULTIDIMENSIONNELLE

3.1.2.2. Perturbations de vitesse

La vitesse générale est l'un des paramètres essentiels dans le fonctionnement d'une machine à papier, car elle influe sur de nombreuses caractéristiques de la feuille fabriquée. En marche normale, il est rare que la vitesse subisse des perturbations importantes car cette grandeur fait généralement l'objet de systèmes de régulations très soignés. Un calculateur est même parfois utilisé spécifiquement pour le réglage des vitesses des différentes sections de la machine.

Il est cependant intéressant de voir la réaction de la structure de commande à des perturbations de la vitesse générale de la machine. Il se peut en effet que la conduite de l'installation amène, pour satisfaire certains objectifs, à modifier volontairement ce paramètre en essayant de conserver le même grammage et la même humidité pour la feuille de papier, ou tout au moins de réduire le plus possible la durée de la phase transitoire au cours de laquelle le produit ne répond plus aux normes de fabrication.

La figure 3.1.10. est relative à un changement de la vitesse générale de l'unité pilote égale à - 5 m/mn, pour passer de 60 à 55 m/mn. Malgré la valeur importante de cette perturbation (presque 10 % de la valeur nominale), la compensation se réalise de manière très correcte, puisque le grammage sec retrouve son point de consigne après un peu moins de 3 minutes. Au bout de cet intervalle de temps, l'humidité moyenne est pratiquement revenue aussi a sa valeur initiale. Il est bon de souligner que l'évolution de cette dernière grandeur traduit en fait plusieurs phénomènes. En effet, dans une première phase, la diminution de vitesse entraîne un temps de passage plus long de la feuille déjà formée dans la sècherie, et donc une diminution de sa teneur en eau. Puis, dans une seconde phase, l'humidité tend naturellement à augmenter de nouveau par suite de la variation concomitante du grammage. La structure de régulation multidimensionnelle, qui superpose ses actions aux phénomènes précédents, révèle donc finalement un comportement très satisfaisant vis-à-vis des modifications éventuelles de la vitesse générale de la machine. Il serait certainement possible d'en améliorer encore les performances en utilisant les résultats présentés au § 2.3.3.1. relatifs à la compensation des perturbations mesurable

3.1.2.3. Perturbations en sécherie

Les perturbations pouvant modifier le fonctionnement de la sècherie sont nombreuses et d'origines très diverses. La plupart d'entre elles, comme par exemple les conditions atmosphériques, sont difficiles à mettre en évidence et à caractériser de manière précise.

Pour cette étude, nous avons donc en fait provoqué des variations sur les pressions de vapeur en sécherie.

Sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier, la sècherie est divisée en deux parties, possédant des alimentations en vapeur séparées. Chacune des deux pressions correspondantes est munie d'une régulation locale efficace.

.../...

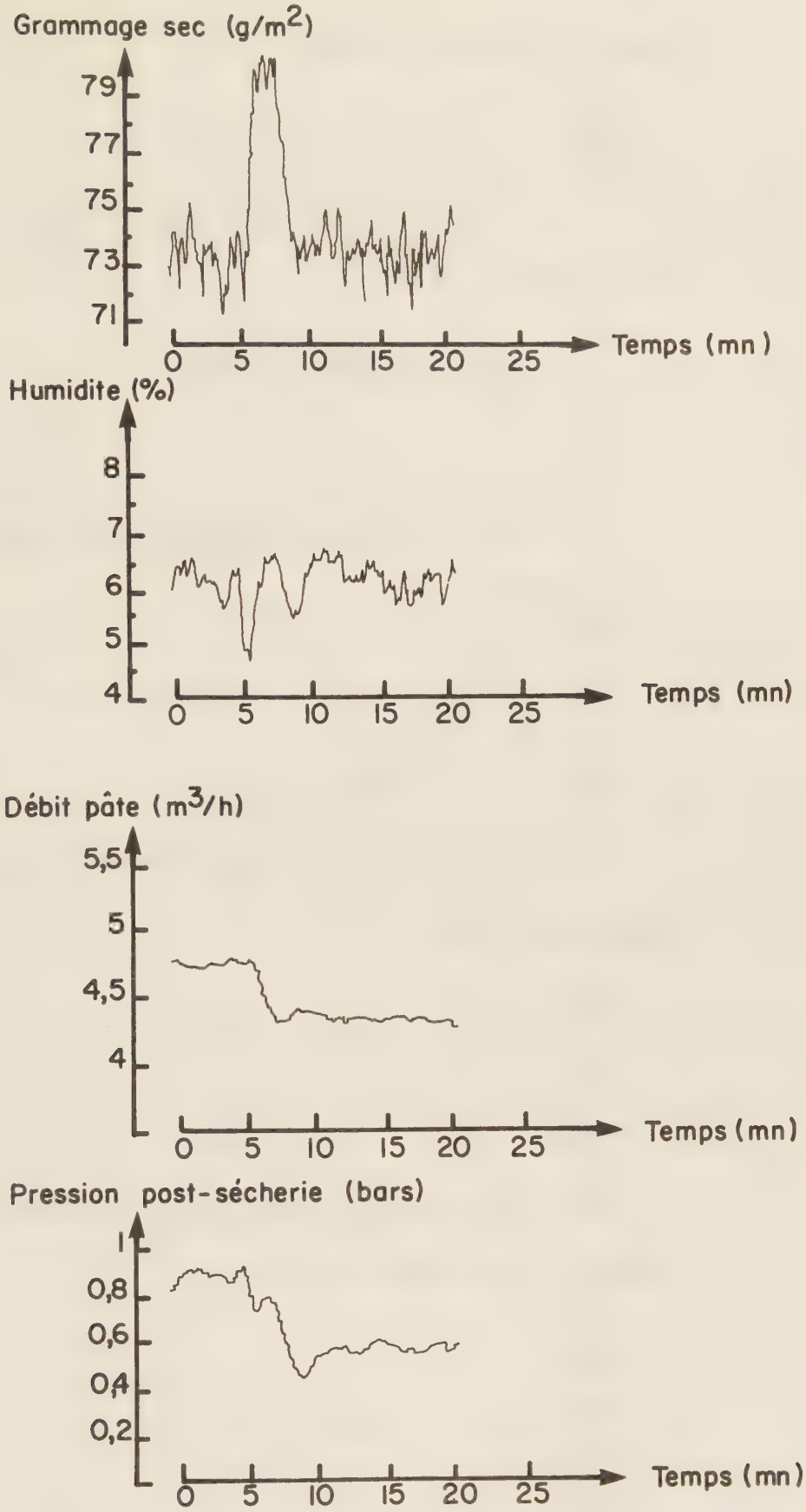


FIGURE 3-1-10 PERTURBATION SUR LA VITESSE GENERALE DE LA MACHINE AVEC LA REGULATION MULTIDIMENSIONNELLE

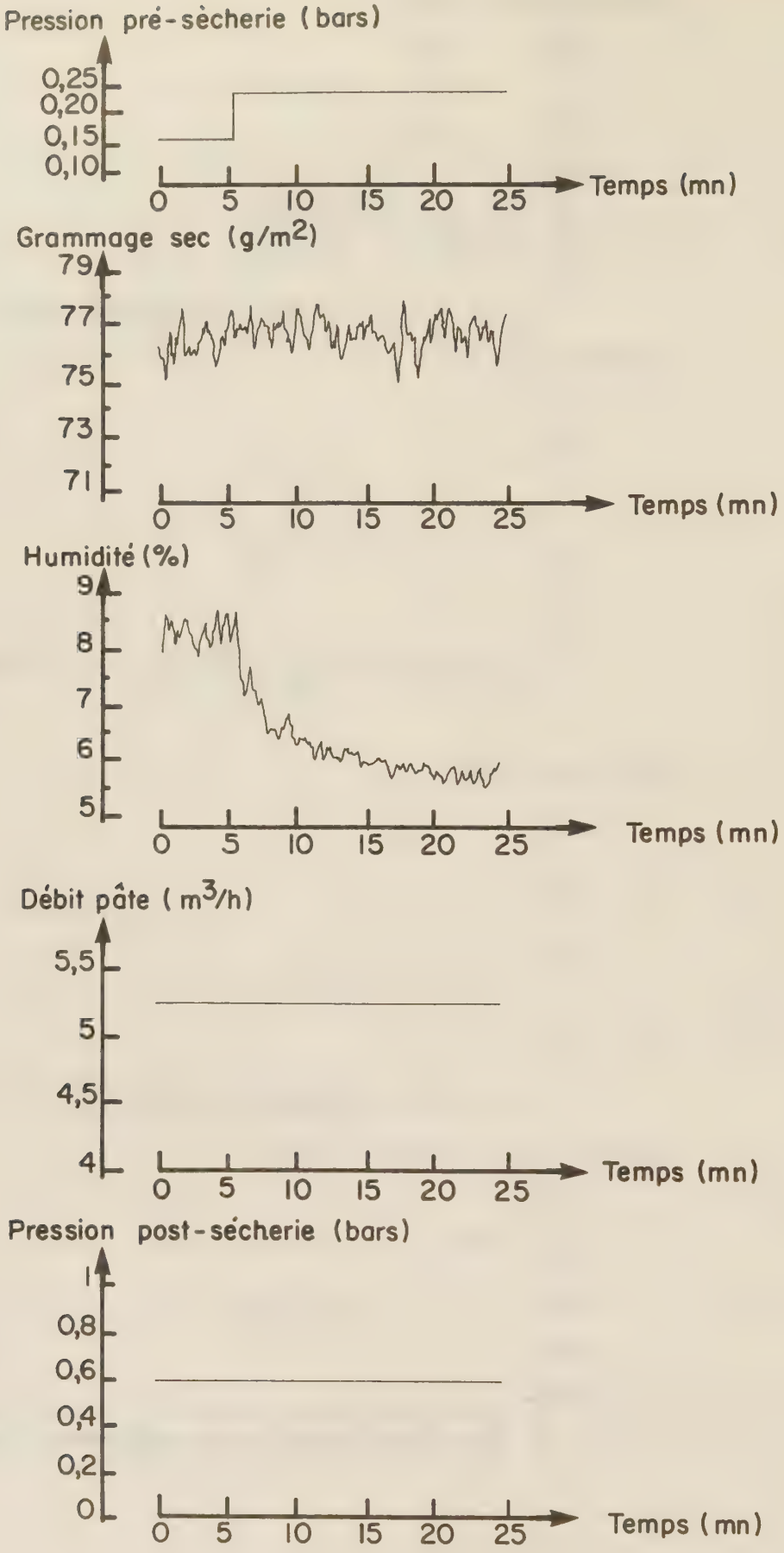


FIGURE 3-I-II MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE OUVERTE

L'étude des perturbations de la pression de vapeur en post-sècherie ne nous paraît pas présenter un très grand intérêt. Cette grandeur est en effet utilisée comme variable d'action dans la structure de commande multidimensionnelle adoptée et, compte tenu de la dynamique du système, une modification imposée à la consigne de sa régulation locale se traduit par une variation d'humidité relativement faible, qui est compensée rapidement et sans problème particulier.

Il est par contre plus intéressant de considérer les variations pouvant intervenir sur la pression de vapeur en pré-sécherie. Cette grandeur, qu'il se révèle parfois utile de modifier en cours de fonctionnement de l'unité pilote, peut être en effet prise en compte dans la structure de commande multidimensionnelle en qualité de perturbation mesurable. Nous avons déjà présenté, lors de l'étude en simulation du § 2.4.2.1., le modèle dynamique retenu pour décrire l'influence de la pression de vapeur en pré-sècherie sur l'humidité.

La figure 3.1.11. illustre le comportement dynamique de ce système en boucle ouverte pour une variation de la pression de vapeur en pré-sècherie égale à + 80 millibars. Pour l'humidité, l'écart séparant les deux points statiques correspondants et de - 2,5 % environ.

Les figures 3.1.12. et 3.1.13. sont relatives à la réponse du système en boucle fermée à la même modification de + 80 millibars de la pression considérée. La première d'entre elles (3.1.12.) représente la compensation de cette perturbation uniquement par les boucles de réaction de la régulation multidimensionnelle. La seconde figure (3.1.13.) fait nettement apparaître les améliorations apportées par la structure d'action anticipative utilisant la mesure de la pertrubation. La variation transitoire constatée sur l'humidité est alors en effet pratiquement négligeable.

Cette comparaison succinte nous paraît mettre en évidence l'intérêt qu'il peut y avoir à prendre en compte le maximum d'informations caractérisant le fonctionnement du procédé. La structure de compensation des perturbations mesurables, telle que nous l'avons présentée au § 2.3.3.1., constitue bien dans ce domaine un moyen efficace d'améliorer les performances du système de commande.

.../...

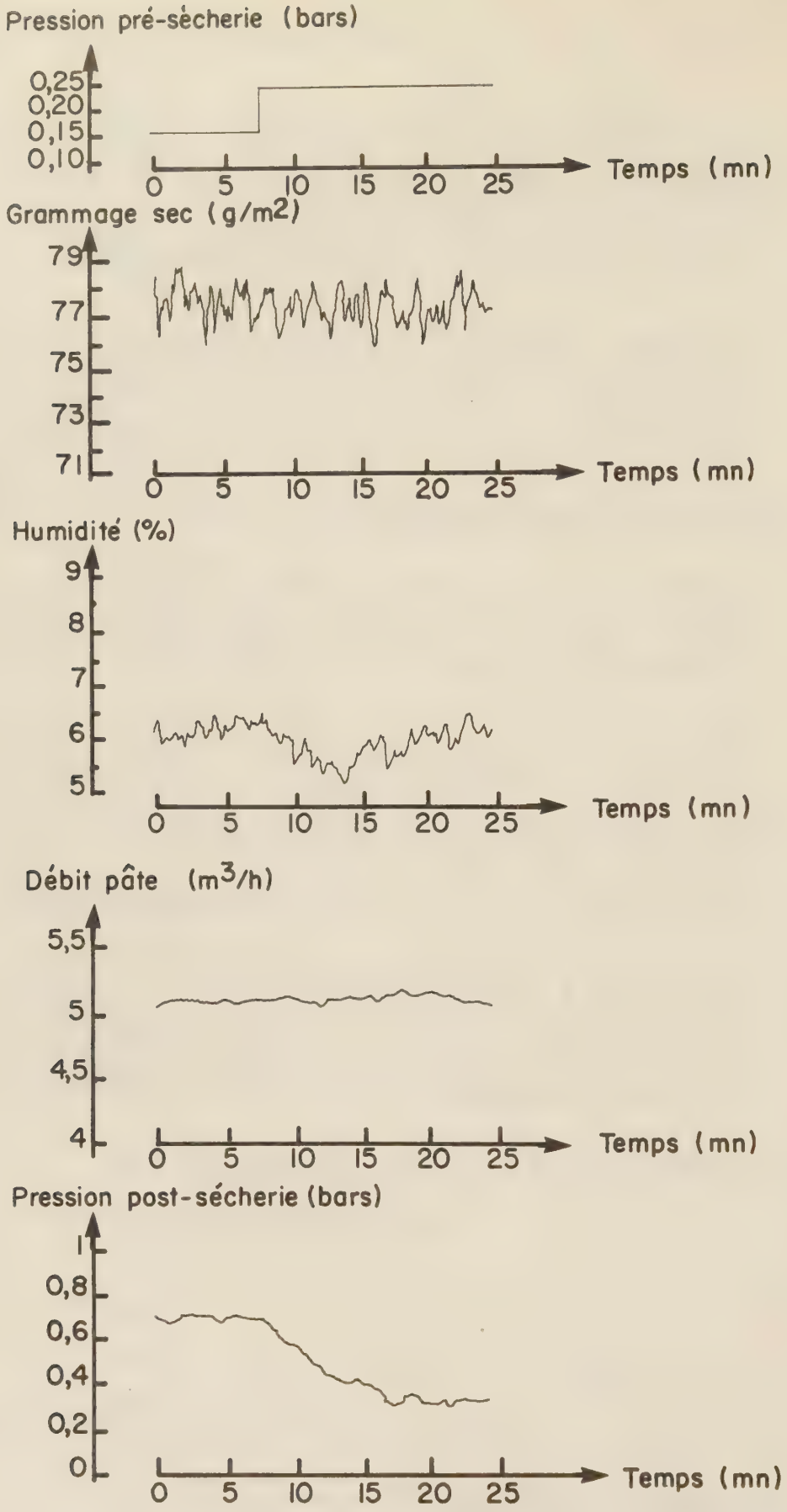


FIGURE 3-1-12 MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE FERMEE, SANS LA STRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES

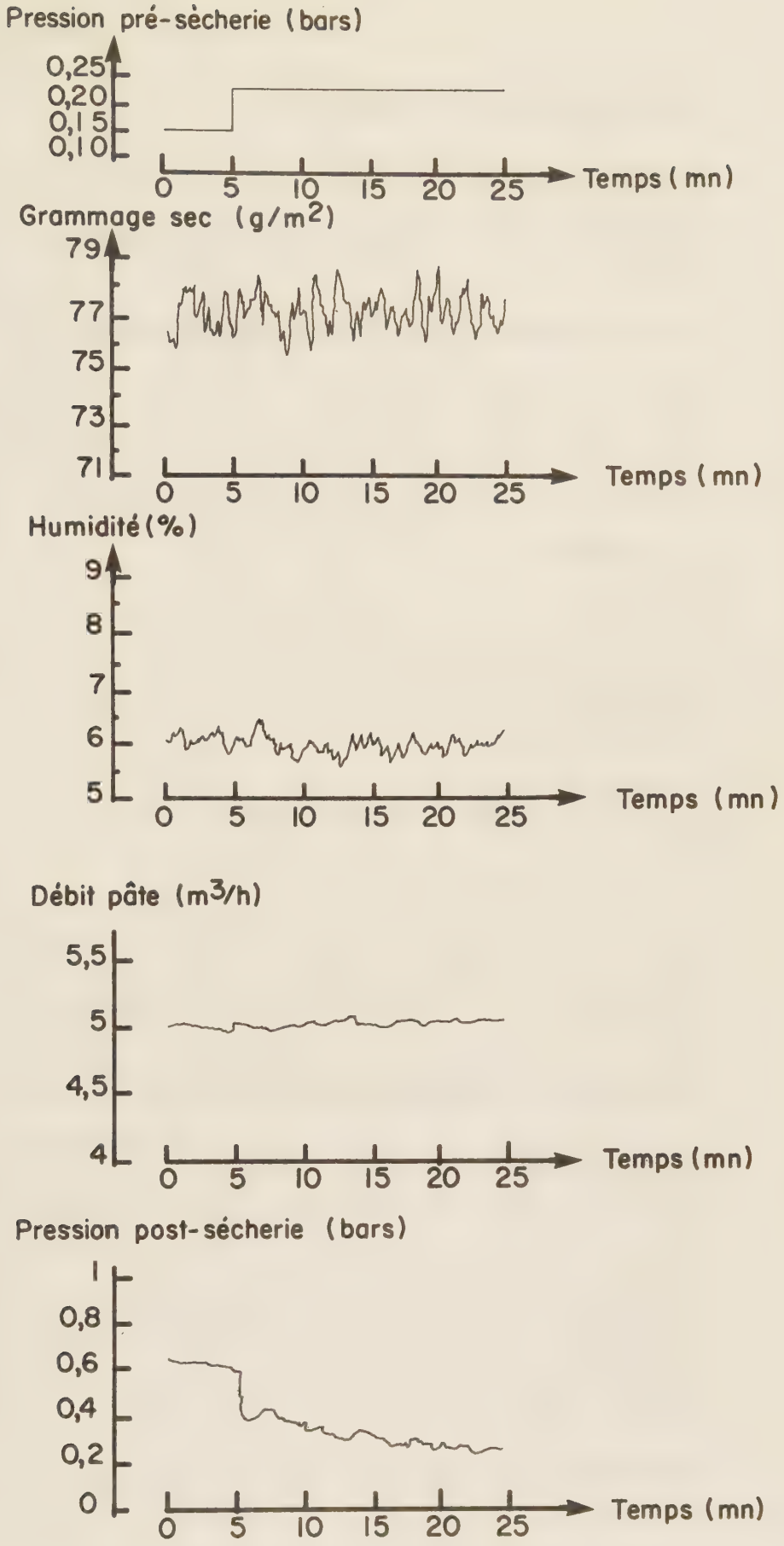


FIGURE 3-1-13 MODIFICATION DE LA PRESSION DE VAPEUR EN PRE-SECHERIE, EN BOUCLE FERMEE, AVEC LA STRUCTURE DE COMPENSATION DES PERTURBATIONS MESURABLES

3.1.3. Etude générale de la commande

En plus de l'examen des modifications de consignes et des compensations de perturbations, envisagées individuellement, il est important d'essayer d'apprécier de manière plus globale le fonctionnement du système muni de sa structure de commande. Deux aspects de ce problème ont particulièrement retenu notre attention.

3.1.3.1. Changement du point de fonctionnement statique

Pour les exemples précédemment présentés, les différents éléments constituant l'estimateur-filtre et la commande correspondent au modèle dynamique retenu pour le principal point de fonctionnement considéré. Les paramètres essentiels moyens caractérisant cet état statique ont les ordres de grandeur suivants :

- Grammage sec : environ 73 g/m^2
- Humidité : environ 6 %
- Débit de pâte : entre 4 et 5 m^3/h
- Pression vapeur en post-sècherie : entre 0,4 et 0,9 bar
- Pression vapeur en pré-sècherie : entre 0,10 et 0,25 bar
- Vitesse générale : 60 m/mn

Les résultats obtenus en ce point de fonctionnement sont très satisfaisants, mais il importe aussi de vérifier que le système de commande mis en oeuvre possède une certaine insensibilité vis-à-vis des variations des paramètres. Une structure d'action nécessitant des tolérances étroites sur la définition du point statique peut difficilement être envisagée en effet pour une application industrielle, particulièrement pour le processus très complexe que constitue la fabrication du papier.

Nous avons donc dans ce but réalisé différents essais sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier, qui ont permis de conclure de manière très satisfaisante sur la robustesse de la solution adoptée.

A titre d'exemple, la figure 3.1.14. illustre le comportement du système pour un point de fonctionnement assez éloigné du point statique habituel précédemment défini. La vitesse générale de la machine, qui conditionne la valeur de plusieurs autres paramètres principaux, est en particulier augmentée de plus de 30 % de la valeur initialement choisie. Ce point de fonctionnement présente les caractéristiques suivantes :

.../...

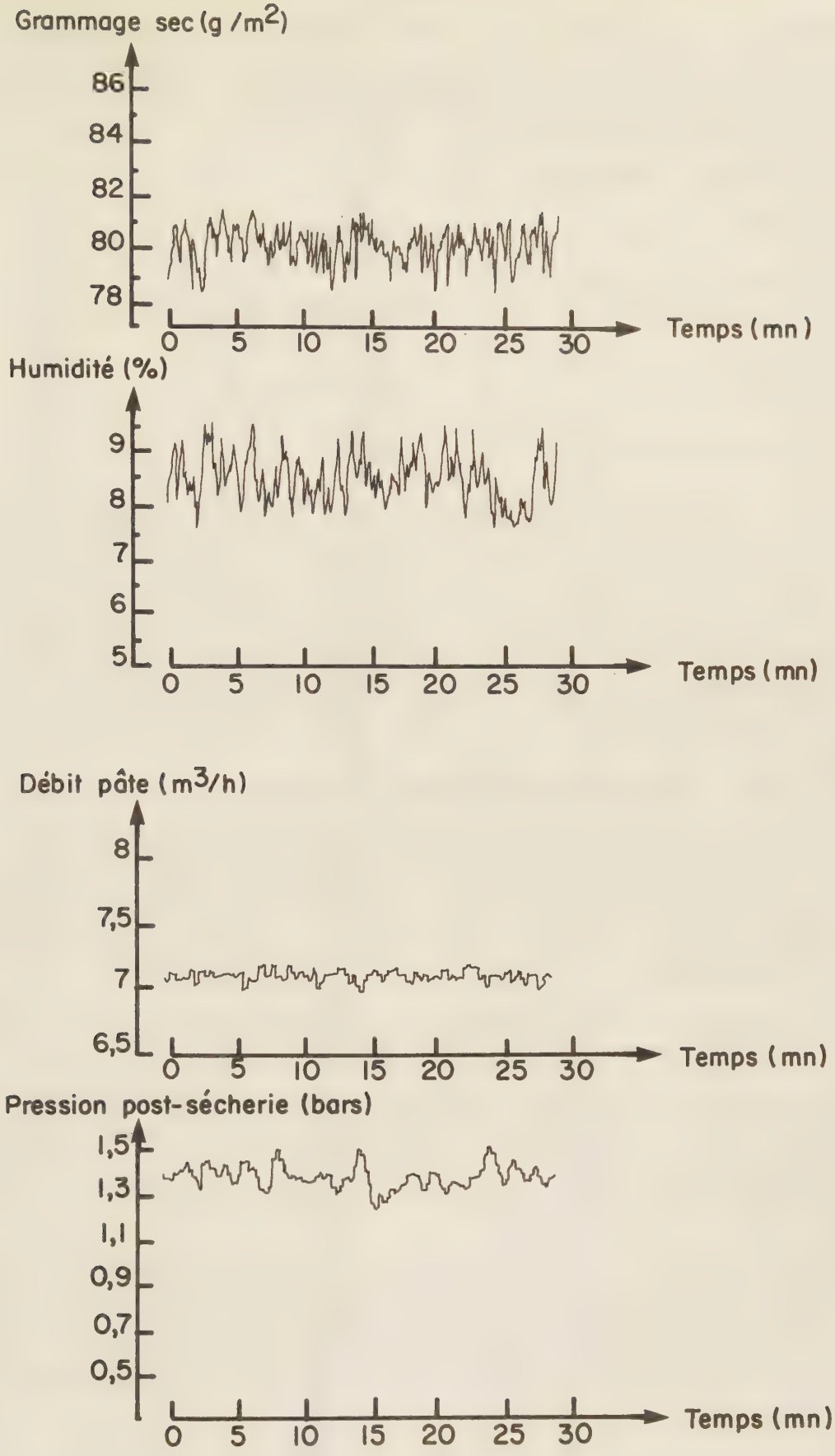


FIGURE 3-1-14 REGULATION MULTIDIMENSIONNELLE EN UN POINT DE FONCTIONNEMENT DIFFERENT DU POINT HABITUEL

- Consigne de grammage sec : 80 g/m^2
- Consigne d'humidité : 8,5 %
- Débit de pâte : de l'ordre de 7 m^3/h
- Pression vapeur en post-sècherie : de l'ordre de 1,4 bar
- Pression vapeur en pré-sècherie : environ 0,6 bar
- Vitesse générale : 80 m/mn

Les graphes présentés montrent que la structure de commande conserve de bonnes performances malgré les changements très importants survenus sur les valeurs de certains paramètres. Nous avons déjà mentionné par ailleurs que l'humidité de la feuille de papier semble avoir, sur l'unité pilote, une amplitude de variations libres à court terme d'autant plus importante que sa valeur moyenne est plus élevée. Il est donc normal que l'évolution de cette grandeur apparaisse un peu plus perturbée que pour une consigne égale à 6 %, mais son écart-type demeure cependant tout à fait admissible. Le grammage sec conserve d'autre part un comportement très satisfaisant.

3.1.3.2. Etude du fonctionnement en palier

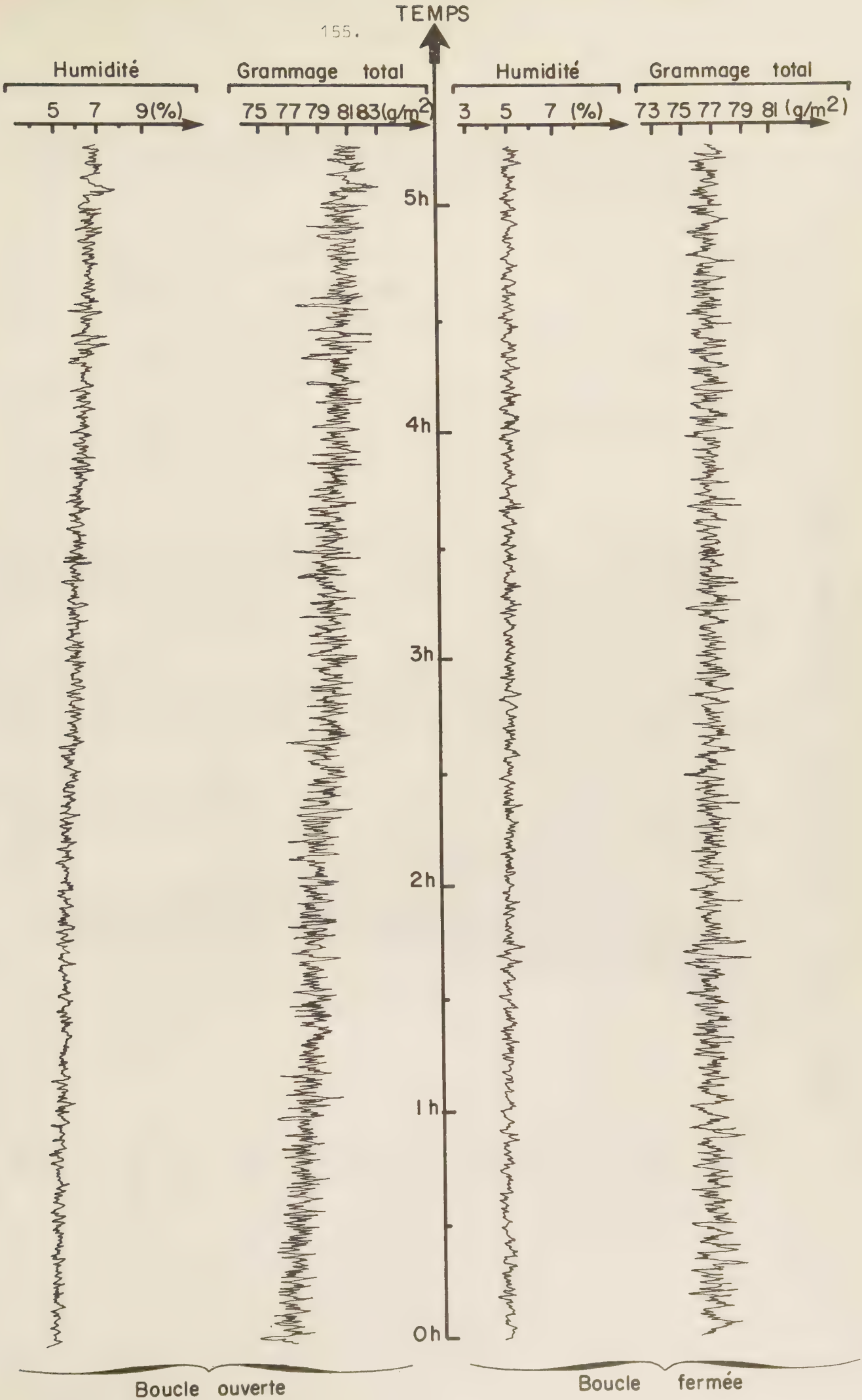
L'étude comparative des fonctionnements du système en palier en boucle ouverte et en boucle fermée permet d'obtenir très simplement certaines caractéristiques essentielles relatives à la structure de commande adoptée. Les résultats que nous présentons à ce propos correspondent à un peu plus de 5 heures de marche normale continue pour chacun des deux cas envisagés.

La figure 3.1.15. rassemble les enregistrements du grammage total et de l'humidité relevés lors de ces essais.

Les points de consignes fixés pour le fonctionnement en boucle fermée sont égaux à 73 g/m^2 pour le grammage sec et 5 % pour l'humidité (ce qui entraîne un grammage total de l'ordre de 76,8 g/m^2). Ces mêmes valeurs ont également été utilisées pour stabiliser le système avant de le laisser évoluer en boucle ouverte.

Il apparaît sur ces diagrammes que le procédé subit tout au long de l'essai en boucle ouverte une dérive non négligeable puisque, dans un intervalle de temps un peu supérieur à 5 heures, les valeurs moyennes du grammage total et de l'humidité ont respectivement varié de 4 g/m^2 et de 2 % environ (ce qui correspond à un écart voisin de 2,5 g/m^2 sur le grammage sec).

.../...


TEMPS
Humidité
5 7 9(%)
Grammage total
75 77 79 81 83(g/m2)
Humidité
3 5 7 (%)
Grammage total
73 75 77 79 81 (g/m2)
5h
4h
3h
2h
1 h
0h
Boucle ouverte
Boucle fermée

Cette tendance naturelle se retrouve d'ailleurs sur le tableau suivant qui présente les valeurs initiales et finales des deux grandeurs d'action lors de l'essai en boucle fermée :

	Début d'essai	Fin d'essai
Débit pâte (m^3/h)	≃ 4,800	≃ 4,590
Pression vapeur en post-sècherie (bars)	≃ 0,500	≃ 0,240

La structure de commande multidimensionnelle utilisée permet donc de compenser très aisément ce type de perturbation à très basses fréquences. Il semble de plus, à partir d'une analyse visuelle sommaire des enregistrements graphiques, que le fonctionnement en boucle fermée améliore sensiblement le comportement à court terme du procédé.

Ces essais permettent de tracer les histogrammes comparatifs du grammage sec et de l'humidité pour les deux modes de fonctionnement considérés. Les partages en classes sont effectués à partir de 1 252 points, la période d'échantillonnage étant de 15 secondes. Ces différents histogrammes sont présentés par les figures 3.1.16. et 3.1.17.

Le tableau suivant résume les principaux résultats statistiques correspondants. Précisons que l'écart quadratique moyen est une grandeur de même nature que l'écart-type, mais obtenue en centrant les données par rapport à la valeur désirée.

.../...

FIGURE 3-I-16 HISTOGRAMMES DU GRAMMAGE SEC

(Intervalle de classe = 0,2 g/m²)

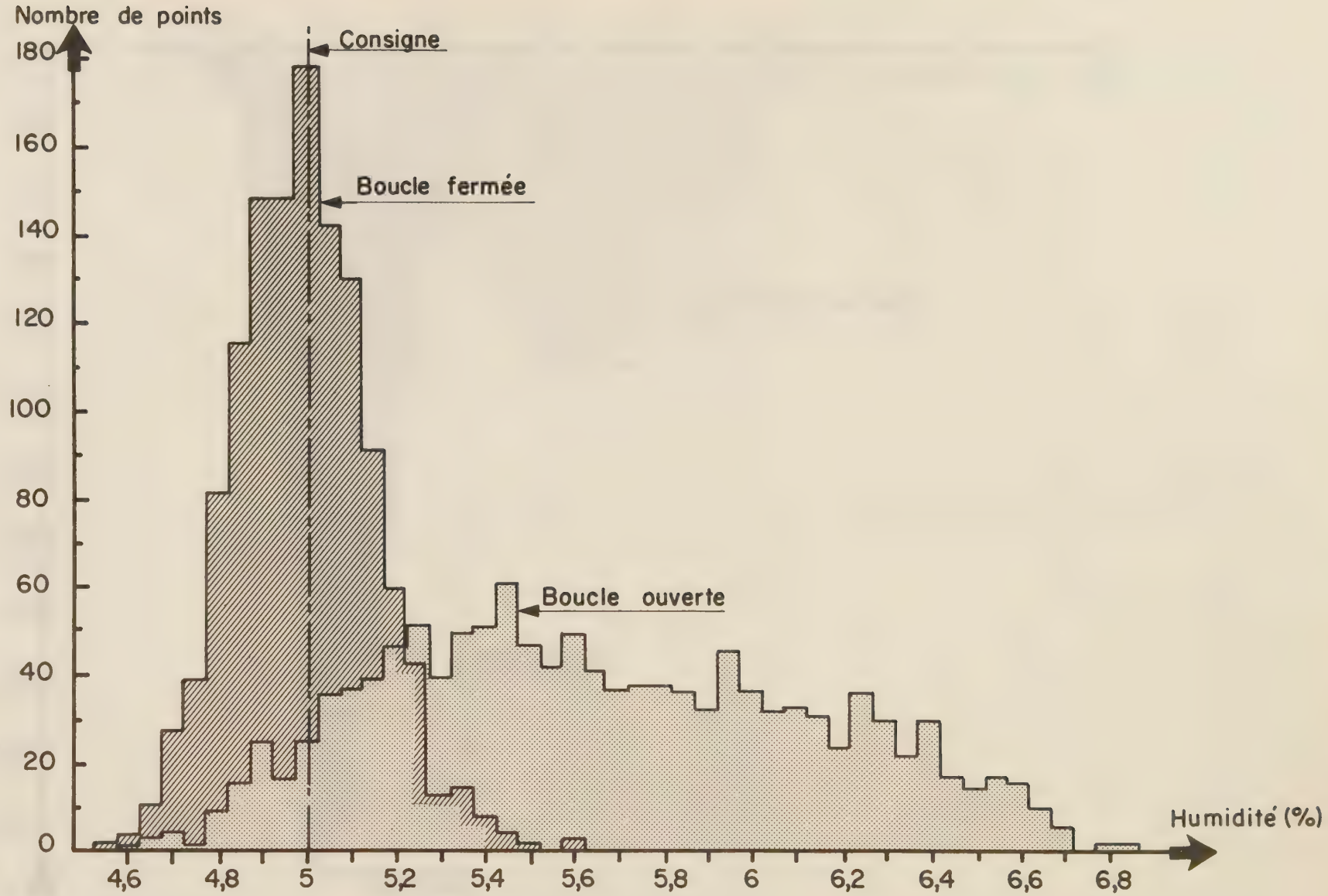


FIGURE 3-1-17 HISTOGRAMMES DE L'HUMIDITE

(Intervalle de classe = 0,05 %)

	GRAMMAGE SEC Boucle ouverte	GRAMMAGE SEC Boucle fermée	HUMIDITE Boucle ouverte	HUMIDITE Boucle fermée
VALEUR DESIREE	73 g/m^2	73 g/m^2	5 %	5 %
VALEUR MOYENNE	75,05 g/m^2	73,14 g/m^2	5,67 %	4,99 %
ECART TYPE	1,11 g/m^2	0,47 g/m^2	0,48 %	0,15 %
ECART QUADRATIQUE MOYEN	2,35 g/m^2	0,50 g/m^2	0,82 %	0,15 %

L'examen de tous ces éléments d'appréciation nous paraît constituer une justification assez probante de l'intérêt de la régulation multidimensionnelle.

Etudiée sur un intervalle de temps relativement long, cette structure de commande se révèle d'une très bonne stabilité et d'une grande uniformité de performances. En présence de perturbations comprises dans une large bande de fréquences, le comportement du système est amélioré de manière fort significative par rapport à l'évolution en boucle ouverte. Nous pouvons en effet remarquer que l'utilisation de la commande multidimensionnelle permet notamment, pour les essais considérés, de diviser l'écart-type du grammage sec par un facteur supérieur à 2, et l'écart-type de l'humidité par un facteur de l'ordre de 3. Les comparaisons portant sur les écarts quadratiques moyens sont à ce propos encore plus démonstratives.

.../...

3.2. COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE DE LA COULEUR

La couleur de la feuille de papier étant définie par ses composantes trichromatiques, le système à commander comporte donc trois entrées et trois sorties. Les organes d'action sont des pompes doseuses assurant les débits de colorants désirés.

Le point de fonctionnement considéré correspond à une teinte "vert pastel" obtenue à partir de colorants rouge, jaune et bleu. L'estimateur-filtre et les éléments de la commande sont calculés pour le modèle d'état discret décrit au § 1.4.2.1., avec une période d'action égale à 45 secondes.

Le comportement dynamique du système au voisinage du point statique choisi est représenté sous sa forme continue par le schéma de la figure 3.2.1.

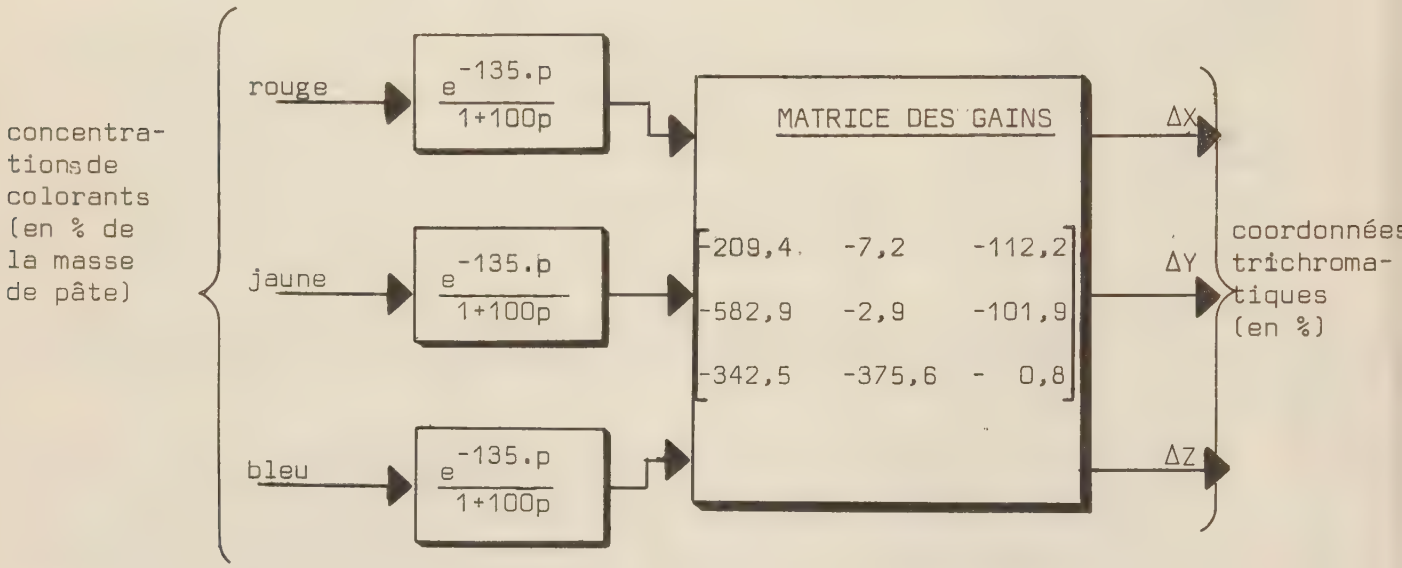


Figure 3.2.1. - SCHEMA GENERAL DU SYSTEME

En employant des colorants pré-dilués à 3,6 grammes par litre, le point de fonctionnement moyen est caractérisé par les paramètres suivants :

X : de l'ordre de 70 %

Y : de l'ordre de 76 %

Z : de l'ordre de 81 %

Débit de colorant rouge : environ 2 l/h
Débit de colorant jaune : environ 11 l/h
Débit de colorant bleu : environ 33 l/h

.../...

Par ailleurs, le grammage sec et l'humidité sont maintenus à leurs valeurs de consignes respectives (73 g/m^2 et 6 %) par la structure de régulation multidimensionnelle précédemment décrite. Il convient toutefois de remarquer que l'estimateur-filtre correspondant ne peut alors plus utiliser la mesure de la concentration en caisse de tête car le capteur relatif à cette grandeur est également sensible à la coloration de la pâte.

Une quatrième pompe doseuse délivre la quantité de sulfate d'alumine nécessaire pour maintenir le pH de la solution en cuve de mélange à une valeur voisine de 4,5.

3.2.1. Changements des valeurs des consignes

Réalisée manuellement, le changement de la teinte du papier fabriqué constitue toujours une opération très délicate par suite des couplages intervenant entre les trois entrées et les trois sorties du système.

La commande multidimensionnelle trouve donc dans ce domaine des possibilités d'application très intéressantes, car elle permet d'envisager globalement le comportement du procédé, tant pour les problèmes d'asservissement que pour les problèmes de régulation.

3.2.1.1. Caractérisation de l'ensemble de commande

En utilisant la structure de commande proposée au § 2.2.3.1., comme pour le cas du grammage sec et de l'humidité, le choix des propriétés dynamiques du système en boucle fermée peut être décomposé en deux parties. Dans une première phase, une recherche en simulation permet relativement aisément de déterminer le critère quadratique d'optimisation à adopter pour obtenir les matrices de réaction [L] et [M] conférant au système les propriétés désirées pour son fonctionnement en régulation. Par la forme du modèle de référence, il est ensuite possible d'imposer certains types d'évolutions lors des changements de consignes, grâce aux éléments d'anticipation [P] et [N] complétant l'expression du vecteur d'action.

Pour les essais réalisés à ce jour sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier, nous avons adopté un modèle de référence dont les caractéristiques dynamiques sont comparables à la réponse du procédé en boucle ouverte. Le processus générant le vecteur des sorties désirées $\vec{w}$ se compose donc en fait de trois modules identiques comportant chacun un retard pur de 135 secondes et une constante de temps de 100 secondes, comme l'indique la figure 3.2.2.

.../...

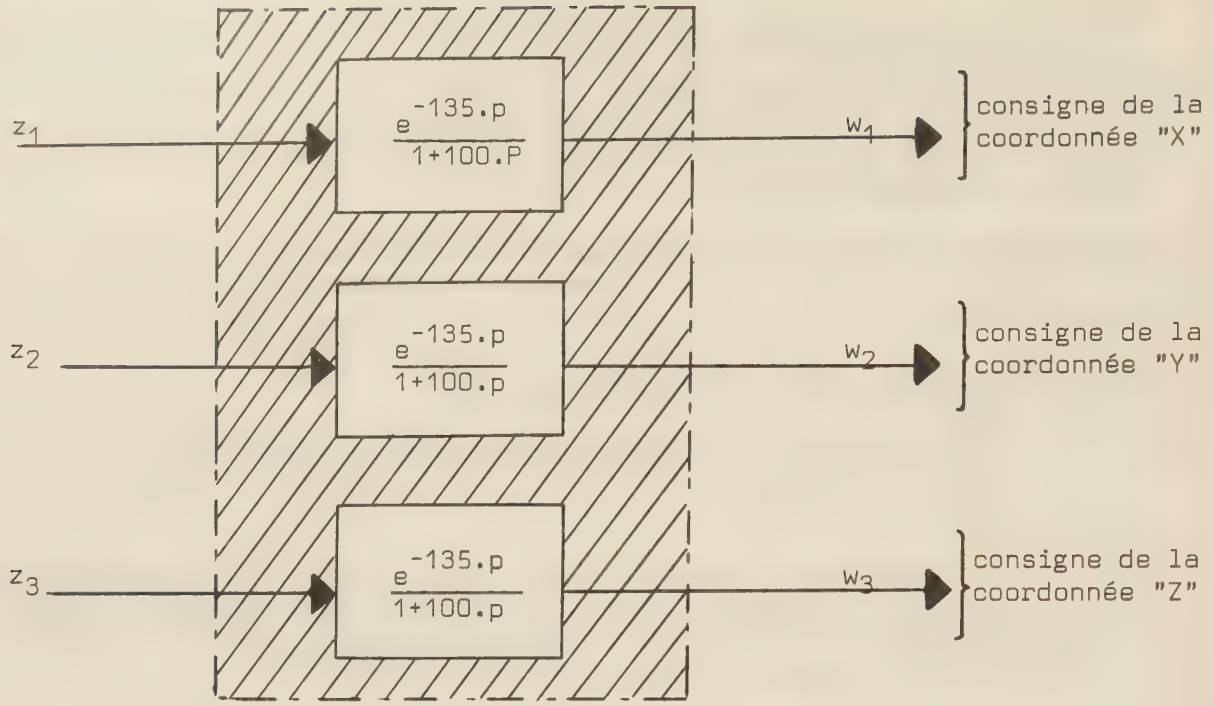


Figure 3.2.2. - MODELE DE REFERENCE

La période d'action étant de 45 secondes, le modèle discret correspondant comporte 12 variables d'état, et les matrices [L], [M], [P] et [N] ont ainsi respectivement pour dimensions (3x12), (3x3), (3x12) et (3x3). Le vecteur d'état utilisé dans la commande est fourni par un estimateur-filtre, à partir de la connaissance des trois entrées et des trois sorties du procédé.

Il faut remarquer d'autre part qu'en pratique, le colorimètre employé délivre des signaux différentiels ΔX, ΔY et ΔZ, définis par rapport à des valeurs de référence X_o, Y_o et Z_o fixées par l'opérateur au moyen de trois potentiomètres. Les consignes doivent donc être exprimées également sous forme d'écarts relatifs à ces mêmes valeurs. En cours de fonctionnement normal, le vecteur des consignes propre à la structure de commande est généralement voisin de zéro, afin de faire travailler le colorimètre au milieu de son échelle pour chaque coordonnée trichromatique.

.../...

3.2.1.2. Exemples de résultats obtenus

Parmi les nombreux résultats expérimentaux obtenus sur l'unité pilote, nous avons retenu trois exemples qui nous paraissent bien mettre en valeur les possibilités offertes par la prise en compte d'un modèle de référence dans la structure de commande multidimensionnelle. Les figures 3.2.3., 3.2.4. et 3.2.5. illustrent respectivement des changements de consigne de + 1 % sur ΔX, -1 % sur ΔY et - 1,5 % sur ΔZ.

Ces différents enregistrements permettent d'effectuer deux constatations. D'une part, la grandeur de sortie qui subit la modification évolue de manière très correcte vers sa nouvelle valeur. Celle-ci est atteinte au bout d'un temps de l'ordre de 7 à 8 minutes, ce qui correspond parfaitement à la dynamique attendue. D'autre part, les deux autres coordonnées, dont les consignes demeurent constantes, ne présentent pratiquement pas de variations transitoires appréciables. Cette dernière remarque met en évidence la qualité très satisfaisante du découplage assurée par la forme de commande adoptée.

De plus, l'examen de l'évolution des débits de colorants montrerait que leurs allures sont très proches des résultats prévus par les études en simulation. En particulier, leurs amplitudes de variation restent toujours admissibles. Pour des raisons de non-synchronisme entre enregistreurs de conceptions différentes, il n'est malheureusement pas possible de présenter de manière significative les courbes d'évolution de ces grandeurs d'action.

Il convient certes de remarquer que tous les changements de couleur réalisés sur l'unité pilote n'ont pas toujours donné lieu à des comportements aussi proches des résultats idéaux. La couleur de la feuille de papier, et même simplement sa mesure, peuvent en effet être perturbées par de nombreux facteurs : qualité de la pâte, dilution des colorants, valeur du pH, variation de l'humidité, tension de la feuille sous le capteur, etc...

Cependant, nous n'avons jamais rencontré de difficultés liées au caractère multidimensionnel fortement couplé du système. Le temps nécessaire pour un changement de consigne est toujours demeuré inférieur à une douzaine de minutes environ, et les écarts transitoires constatés sur les coordonnées trichromatiques de consignes constantes sont restés d'amplitudes raisonnables et de durées relativement brèves.

.../...

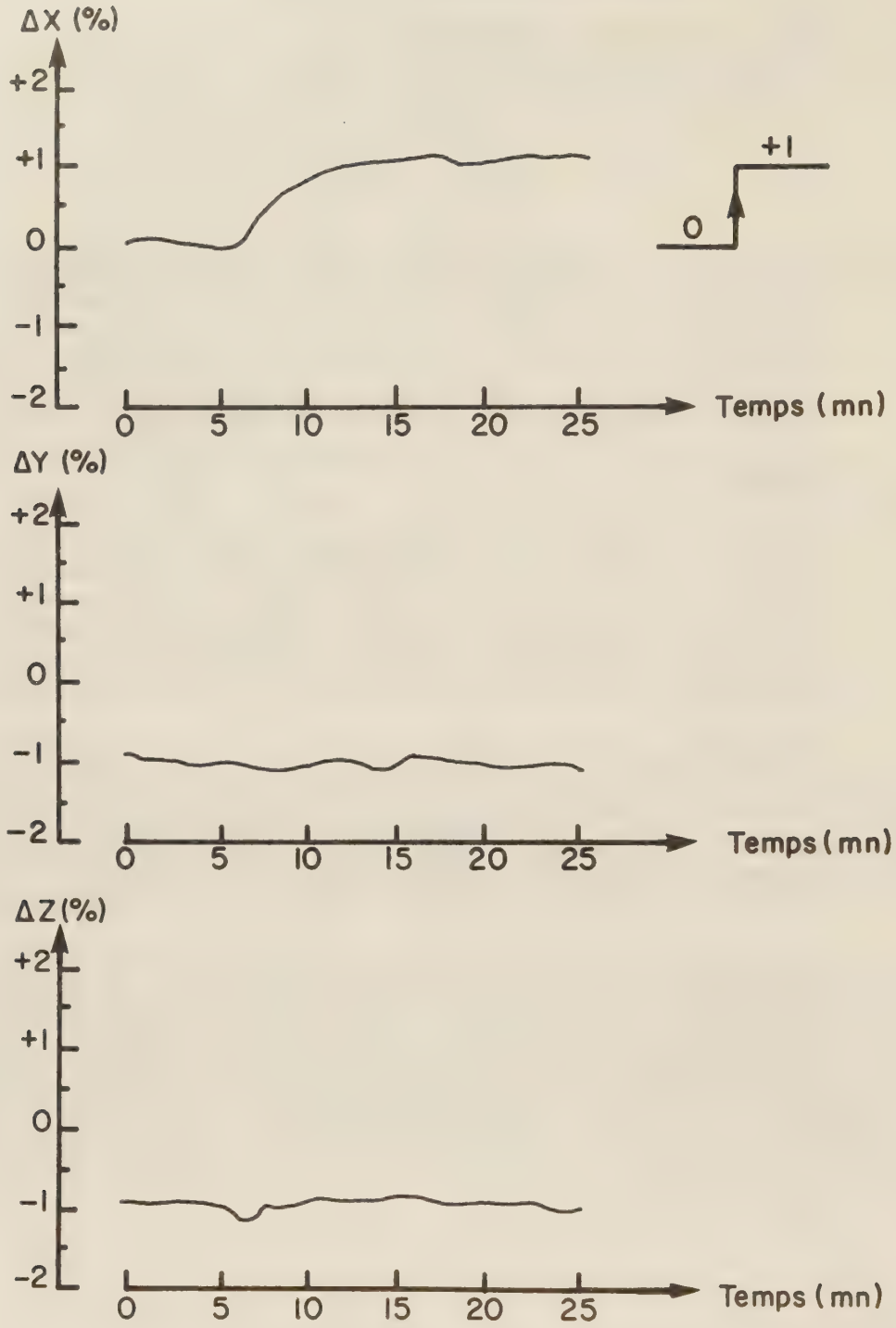


FIGURE 3-2-3 CHANGEMENT DE CONSIGNE SUR ΔX

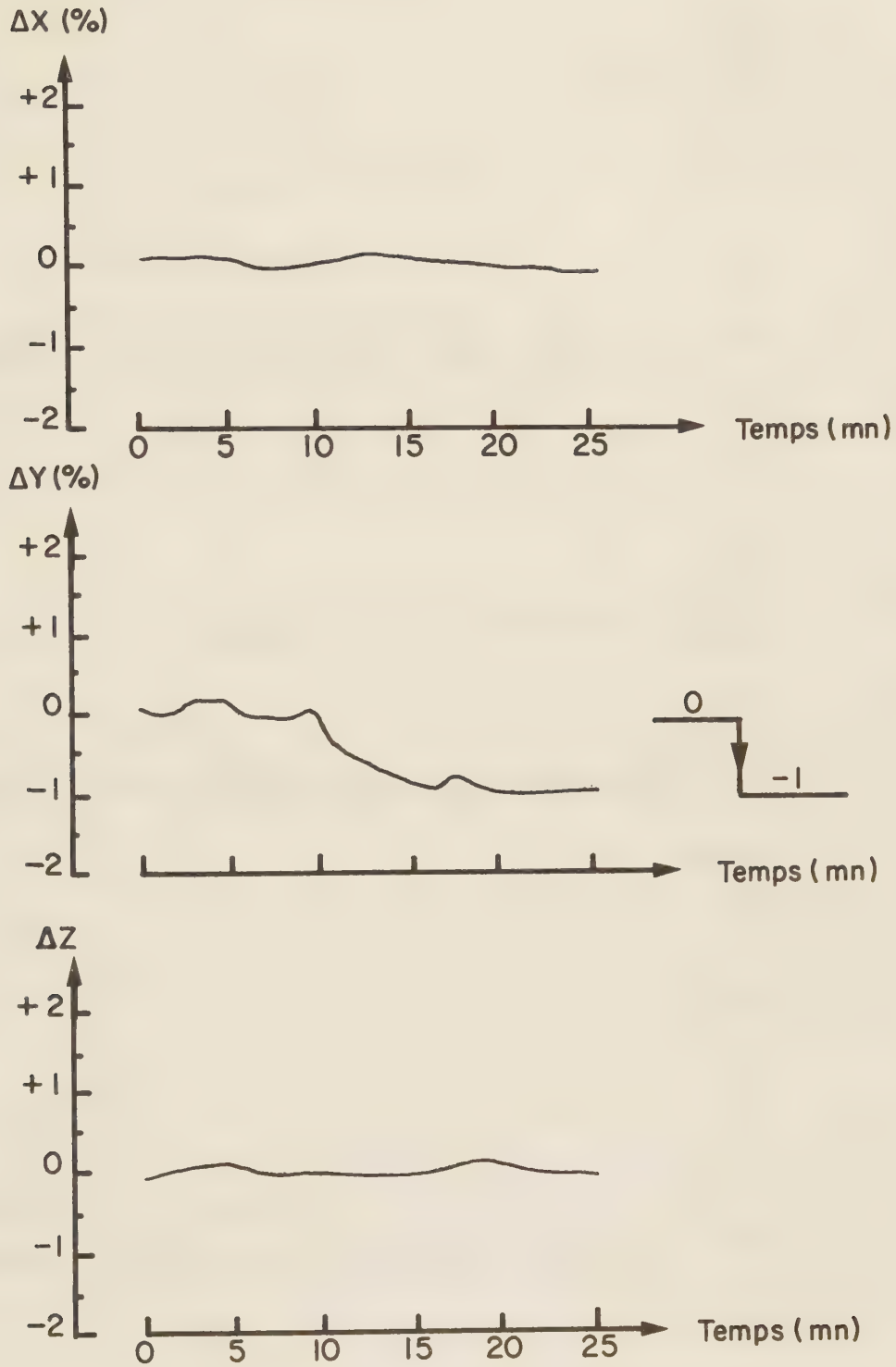


FIGURE 3-2-4 CHANGEMENT DE CONSIGNE SUR ΔY

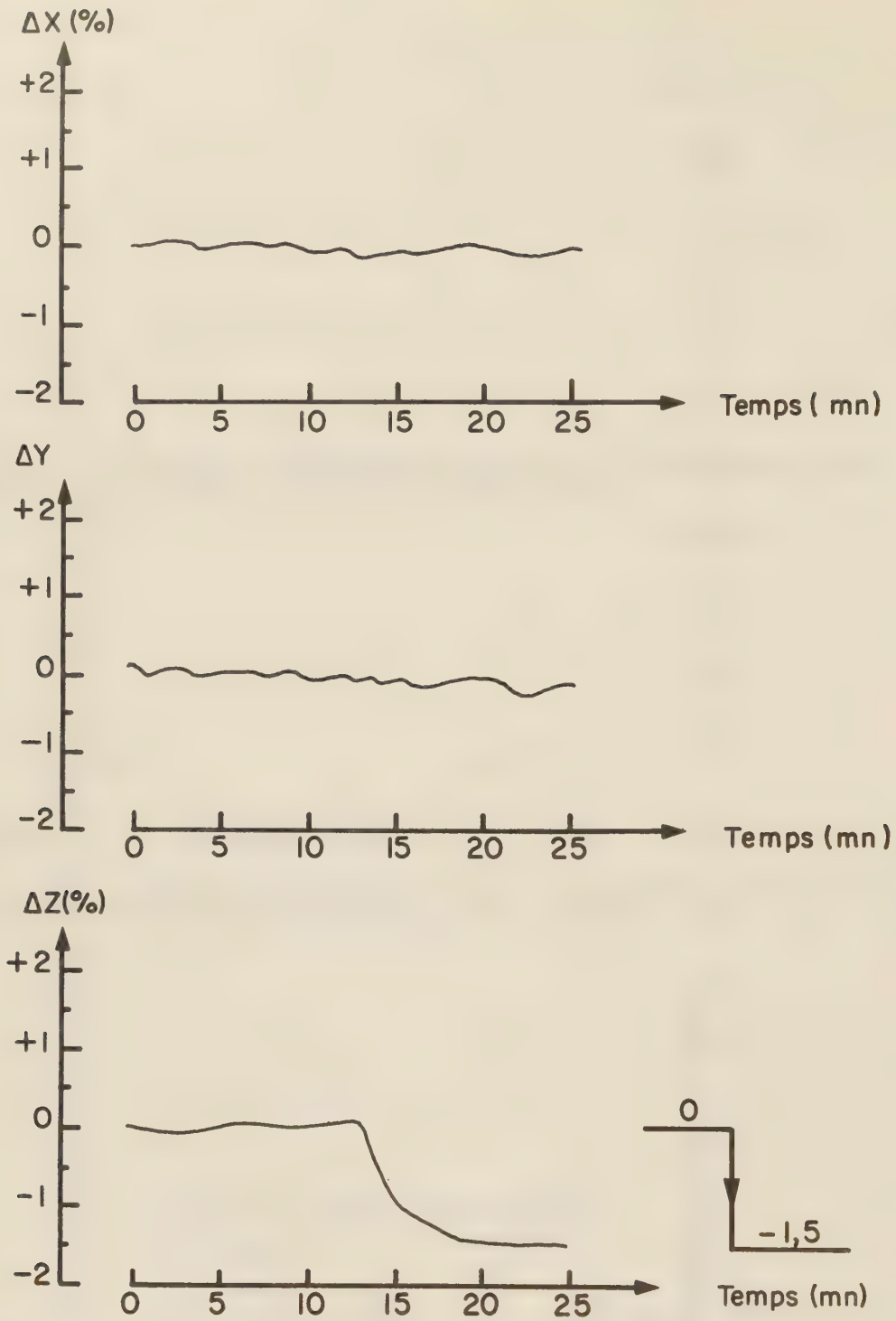


FIGURE 3-2-5 CHANGEMENT DE CONSIGNE SUR ΔZ

3.2.2. Réponses à différentes perturbations

La coloration du papier étant influencée de manières très diverses par les évolutions d'autres paramètres, il importe d'évaluer l'aptitude du système de commande utilisé à maintenir en marche normale les coordonnées trichromatiques dans une zone de variations acceptable. Nous nous proposons donc de présenter à ce propos quelques éléments d'appréciation.

3.2.2.1. Perturbations accidentelles

Sur un processus aussi complexe que la fabrication et la coloration du papier, il est souvent très difficile de déceler l'origine des perturbations, tant les causes possibles en sont nombreuses. Dans certains cas cependant, un contrôle suivi de l'évolution du système permet d'apprécier sans risque d'erreur la corrélation entre différents phénomènes. La présence d'un calculateur numérique couplé au procédé se révèle dans ce domaine d'une grande utilité par la capacité de scrutations simultanées alors offerte.

Pour illustrer le fonctionnement de la régulation multidimensionnelle de la couleur, nous avons choisi deux exemples qui nous paraissent assez démonstratifs du comportement du système ainsi commandé.

Le premier cas considéré, correspondant à la figure 3.2.6., concerne une variation accidentelle du pH de la solution en cuve de mélange. Or, dans les conditions d'expérimentation réalisées, ce paramètre révèle une influence sur la fixation des colorants par les fibres de cellulose. L'enregistrement de la figure 3.2.6. montre que le pH a augmenté de 0,5 point environ avant d'être ramené à sa valeur initiale par correction du débit de sulfate d'alumine. Malgré cela, la régulation multidimensionnelle a permis de ne constater que des écarts transitoires relativement faibles (inférieurs à 0,5 %) sur les coordonnées ΔX et ΔZ, la coordonnée ΔY semblant par ailleurs très peu affectée par cette perturbation. Les composantes de la couleur retrouvent leurs points de consignes (respectivement + 1, -1 et -1) pratiquement en même temps que se produit le retour du pH à la valeur de 4,5 désirée.

Il est difficile d'apprécier vraiment le comportement de la structure de commande puisque nous n'avons évidemment pas de résultats correspondant à la même perturbation en boucle ouverte. Cependant, les variations enregistrées sur les débits de colorants indiquent une assez nette modification du point de fonctionnement : si le débit de colorant rouge n'a été que faiblement changé, les débits des colorants jaune et bleu sont respectivement passés de 6,5 à 7,5 l/h et de 25,3 à 27,6 l/h. Il est donc logique de penser que la perturbation sur la couleur aurait été relativement importante en boucle ouverte.

.../...

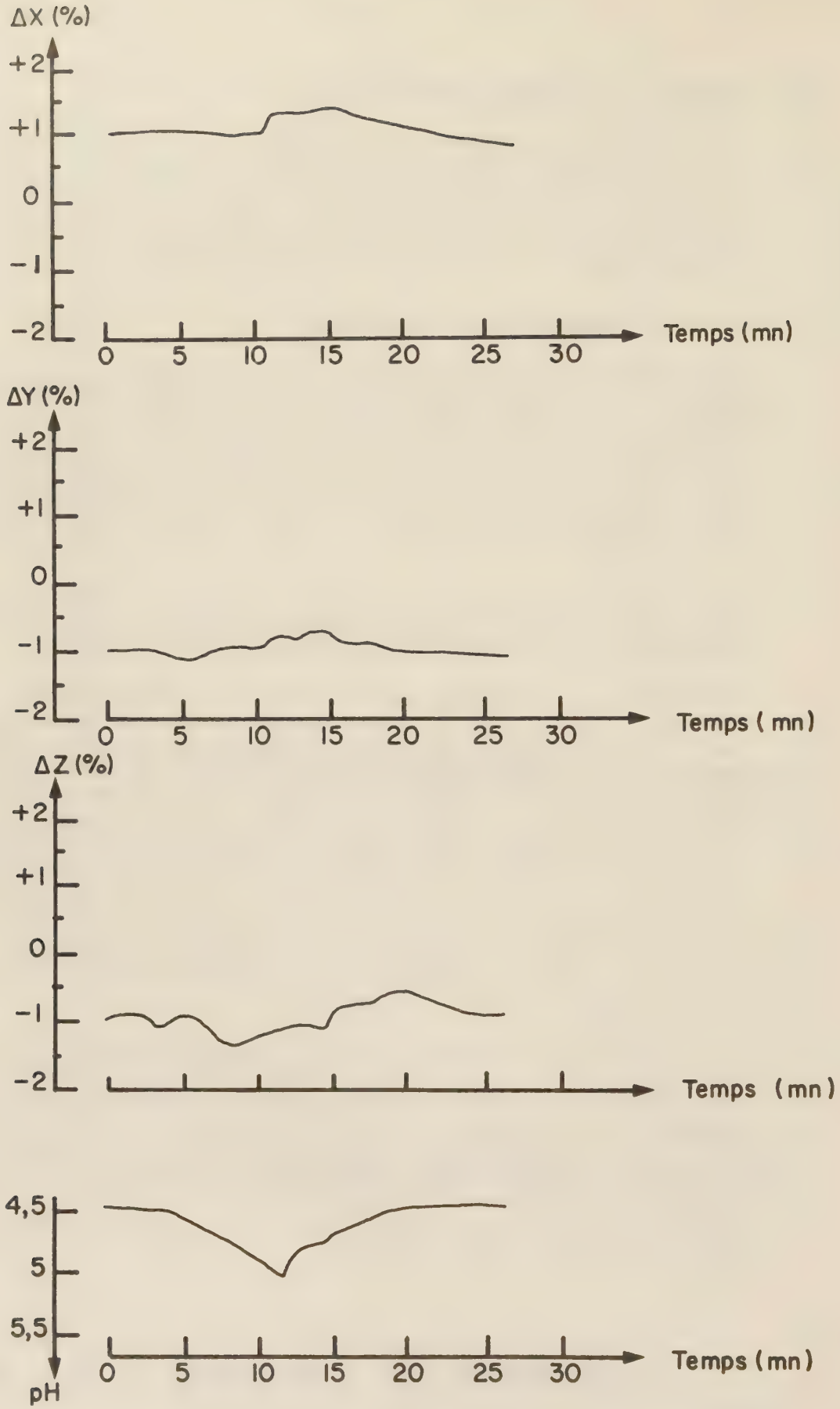


FIGURE 3-2-6 REPONSE A UNE VARIATION DU pH

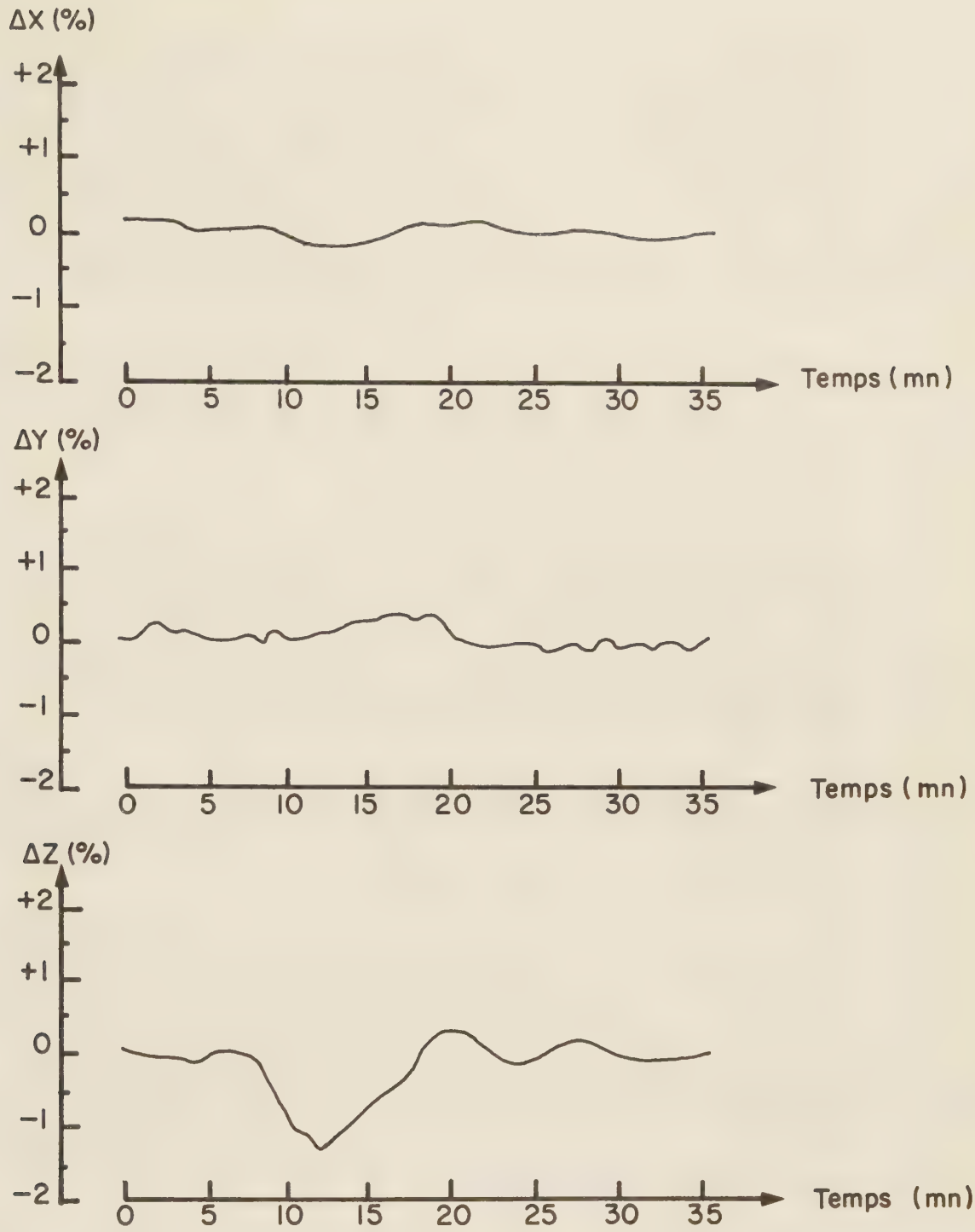


FIGURE 3-2-7 REPONSE A UN CHANGEMENT DE LA DILUTION DU COLORANT JAUNE

Le second cas présenté est illustré par la figure 3.2.7. Il s'agit d'une variation de la dilution du colorant jaune au moment d'un changement du bac d'alimentation correspondant, la nouvelle solution se révèlant nettement plus concentrée que l'ancienne. Comme l'indique la matrice des gains rappelée sur la figure 3.2.1., c'est la composante ΔZ qui est principalement affectée par cette modification. Son écart transitoire maximum est de l'ordre de - 1,1 %. Or, la diminution de débit du colorant jaune est d'environ 3 l/h puisque cette grandeur passe de 11 l/h à 8 l/h. D'après la valeur identifiée pour le gain, la variation de la coordonnée ΔZ en boucle ouverte serait donc voisine de - 2,3 %.

La structure de commande multidimensionnelle de la couleur apparaît encore par conséquent d'une efficacité très satisfaisante, l'erreur transitoire ayant par ailleurs pratiquement disparu au bout d'une douzaine de minutes en dépit de l'amplitude de la perturbation.

3.2.2.2. *Utilisation de pâte colorée*

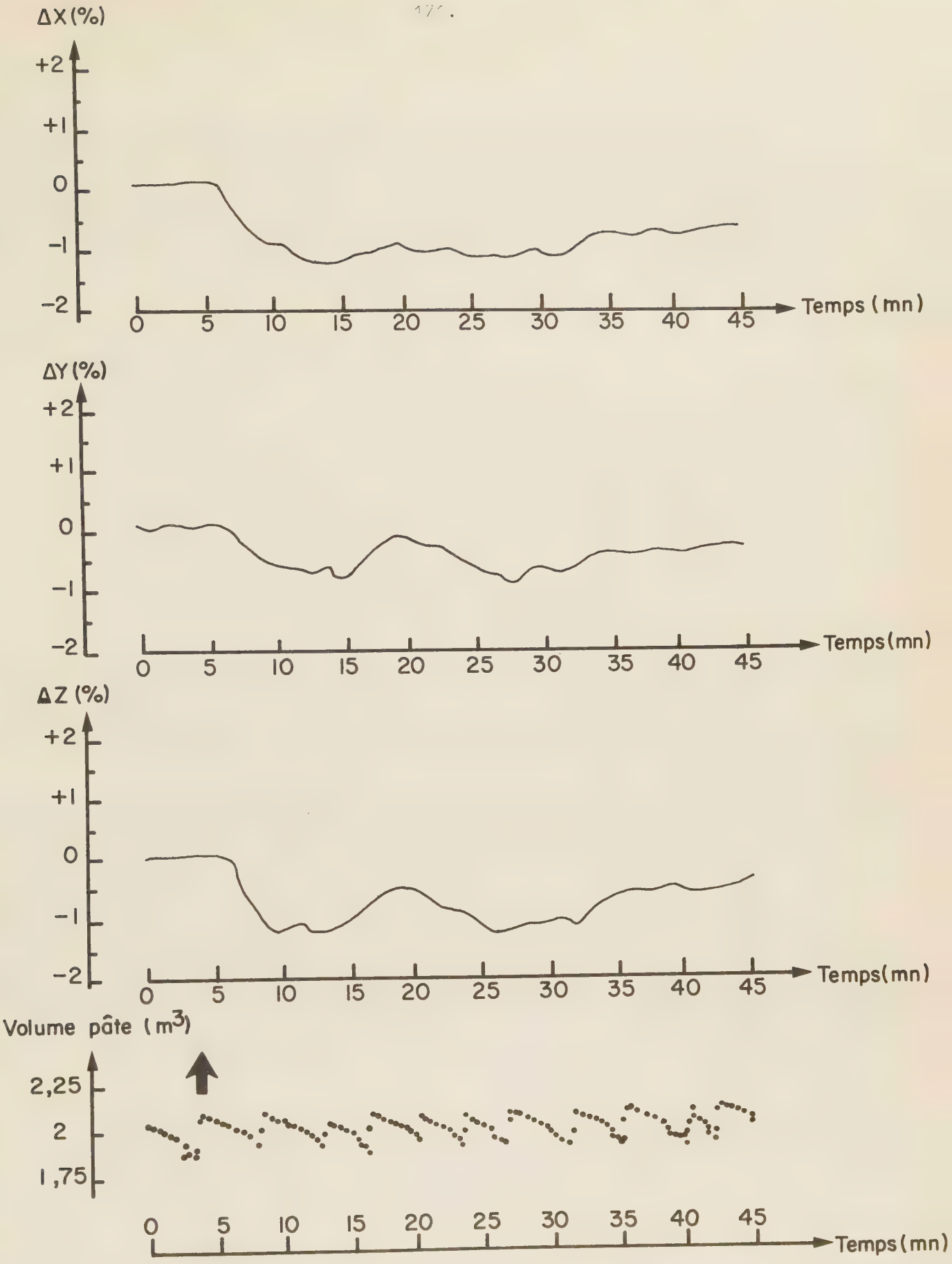
Tous les résultats relatifs au processus de coloration que nous avons mentionnés précédemment concernent l'incorporation des colorants dans une pâte initialement blanche. Or, il se pose pour les installations industrielles fabriquant du papier de couleur le problème très important de la possibilité de recyclage de certains déchets de production appelés "cassés" : rognures de bords de feuille, pertes résultant d'une casse de la feuille sur la machine, chutes inévitables lors des découpages, etc....

La récupération des "cassés" blancs ne pose guère de problèmes, mais ce n'est évidemment pas le cas pour les "cassés" colorés. Leur utilisation étant généralement très discontinue, ils risquent en effet de perturber considérablement la teinte du papier fabriqué, et d'une manière quantitativement difficile à prévoir avec précision.

Il serait donc particulièrement avantageux de pouvoir mettre en oeuvre une régulation de couleur capable de maintenir le papier à la teinte désirée malgré l'incorporation d'une certaine quantité de pâte colorée dans les circuits de tête de la machine. Bien sûr, il n'est pas question d'utiliser des "cassés" de n'importe quelle couleur pour fabriquer une teinte donnée : du point de vue spectral, le mélange de colorants est en effet soustractif, et il n'est pas possible de réaliser des débits négatifs !... Nous nous sommes donc intéressés au cas le plus fréquent qui concerne l'emploi de "cassés" d'une teinte sensiblement voisine des caractéristiques de la fabrication en cours.

L'essai effectué sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier est présenté par la figure 3.2.8. En utilisant la régulation séquentielle du niveau du cuvier de tête de machine, nous avons ajouté la pâte colorée par fractions de 0,2 m^3 environ à des intervalles de temps de l'ordre de 4 minutes, le volume initial de pâte blanche présente dans ce cuvier étant voisin de 2 m^3. Le graphe inférieur de la figure 3.2.8. est l'enregistrement correspondant au volume du cuvier, chaque discontinuité

.../...



IGURE 3-2-8 INCORPORATION DE PATE PROVENANT DE LA RECUPERATION DE "CASSES" COLORES

caractérisant un nouvel apport de pâte colorée. Les trois enregistrements supérieurs sont relatifs aux coordonnées trichromatiques, et montrent que les écarts transitoires maximaux sont de l'ordre de - 1,3 % en début d'évolution, et décroissent ensuite régulièrement malgré une perturbation passagère supplémentaire. Au bout de 45 minutes de ce mode de fonctionnement, les trois erreurs sont ramenées à - 0,5 % environ. Or, pendant le même temps les débits des colorants se sont trouvés modifiés de la manière suivante par la régulation multidimensionnelle de la couleur :

	débits à t = o	débits à t = 45mn
COLORANT ROUGE	1,9 l/h	1,9 l/h
COLORANT JAUNE	8,5 l/h	2,8 l/h
COLORANT BLEU	28,6 l/h	13,0 l/h

Les débits des colorants jaune et bleu ont donc subi des diminutions considérables en valeurs relatives. La constance du débit de colorant rouge s'explique parfaitement par la provenance des "cassés" utilisés, correspondant à une expérimentation antérieure ne comportant pas l'adjonction de ce colorant.

Le comportement de la régulation multidimensionnelle de couleur nous semble bien prouver par cet exemple la qualité de la structure adoptée. Il faut souligner de plus que nous nous sommes volontairement placés dans des conditions de fonctionnement très sévères. Sur une installation industrielle, l'incorporation des "cassés" colorés se ferait en effet de façon beaucoup plus progressive, et l'écart transitoire serait par conséquent vraisemblablement encore plus réduit. Notons au passage que ces écarts sont négatifs sur trois coordonnées, ce qui est bien normal puisque l'apport des "cassés" colorés tend à rendre trop fortes les quantités totales de colorants, et donc à faire diminuer les caractéristiques de blancheur mesurées par le capteur.

.../...

3.3. OPTIMISATION STATIQUE DES CONDITIONS DE MARCHE

Bien que cette étude ne soit pas liée de manière exclusive à la structure de commande multidimensionnelle choisie, il paraît utile d'en présenter les principaux aspects car elle se rapporte à un problème très souvent rencontré sur les machines à papier industrielles. La solution en est de plus relativement simple et facile à mettre oeuvre lorsqu'un calculateur numérique est couplé au procédé.

3.3.1. Principe d'optimisation adopté

Il existe dans l'industrie papetière, et même plus spécifiquement pour les machines à papier, de nombreux critères pouvant faire l'objet d'une optimisation statique. Mais ces indices de performances sont souvent assez mal définis, et difficiles à expliciter sous une forme mathématique aisément exploitable. Pour notre part, nous avons donc choisi un principe d'optimisation statique simple qui correspond à un mode de conduite d'une machine à papier très fréquemment recherché : le fonctionnement à production maximale.

3.3.1.1. Fonctionnement à production maximale

Devant la consommation sans cesse grandissante des divers produits de l'industrie papetière, et dans l'état actuel du marché français, la tendance assez générale est de faire fonctionner les unités de production au maximum de leurs capacités.

La production d'une machine à papier dans un intervalle de temps donné est définie par trois paramètres : la vitesse générale, la largeur de la feuille et son grammage. Pour une unité déjà construite, la largeur de feuille est évidemment limitée par les dimensions de l'installation. Par ailleurs, la valeur du grammage est imposée pour chaque type de fabrication. C'est donc par action sur la vitesse qu'il est possible d'augmenter la production.

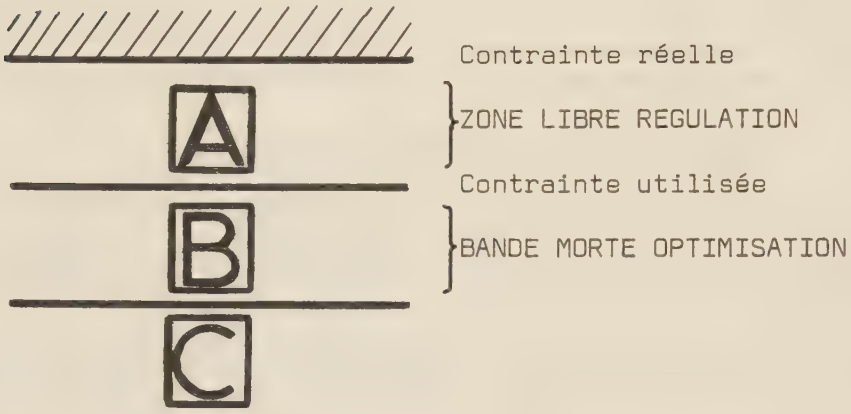
Cependant, le système est soumis à de nombreuses contraintes qui restreignent le domaine d'évolution admissible : parmi les principales, citons la capacité des installations de raffinage alimentant la machine, les débits maximaux dans les circuits de tête, les possibilités de la sècherie, et la vitesse générale elle-même. Ces contraintes peuvent être déterminées en temps réel par le calculateur à partir de divers paramètres de fonctionnement, ou imposées par l'opérateur selon les conditions de marche.

Le problème consiste donc à faire évoluer la vitesse dans le sens adéquat pour maintenir la production à son plus haut niveau admissible tout en respectant les contraintes fixées qui, bien sûr, peuvent changer de valeur en cours de fonctionnement de l'installation.

.../...

3.3.1.2. Algorithme d'optimisation

Les grandeurs soumises à des contraintes correspondent souvent à des variables d'actions prises en compte par les systèmes de régulation. Il est donc indispensable que les contraintes fixées ne soient pas tout à fait atteintes, afin de maintenir une certaine plage de variations possible pour répondre aux sollicitations des régulations. Par ailleurs, il faut éviter que la vitesse générale de la machine ne soit sans cesse modifiée en cours de marche normale de l'installation. Pour cela, il convient d'adopter également des bandes mortes pour l'algorithme d'optimisation. Par suite, l'amplitude d'évolution de chaque variable soumise à une contrainte est finalement caractérisée de la manière indiquée par le schéma suivant :



Lorsque toutes ces variables sont dans leur partie C, la vitesse peut être augmentée. Par contre, dès qu'au moins l'une d'entre elles arrive dans sa partie A, la vitesse doit être diminuée. La figure 3.3.1. présente sous forme d'organigramme l'algorithme d'optimisation de base ainsi défini.

Cet algorithme d'optimisation doit être excité avec une période suffisamment grande pour permettre au système muni de ses régulations d'être stabilisé avant tout nouvel incrément de vitesse.

.../...

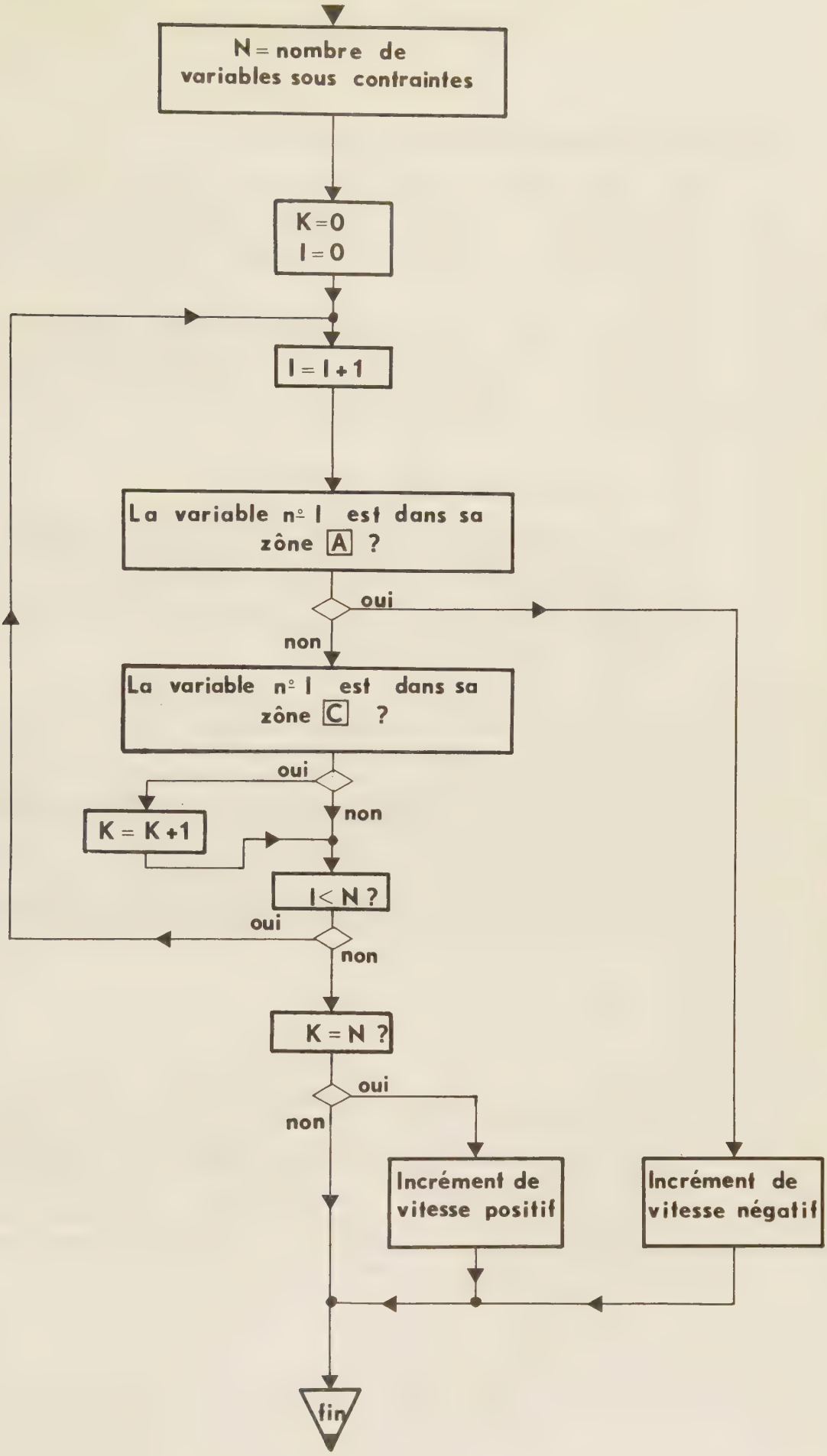


FIGURE 3.3.1 — ALGORITHME DE BASE

3.3.2. Application à l'unité pilote

Nous avons mis en oeuvre l'optimisation statique ainsi définie sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier, en association avec la régulation multidimensionnelle de grammage et d'humidité, différents essais ayant par ailleurs été également réalisés avec d'autres structures de commande.

Pour cette étude, nous nous sommes intéressés uniquement à la fabrication de papier blanc. Le cas des papiers colorés ne devrait pas introduire de difficultés supplémentaires puisqu'il suffit dans ce cas de faire varier les débits de colorants dans le même rapport que la production de la machine.

3.3.2.1. Conditions d'expérimentation

Comme nous l'avons indiqué déjà, la période d'optimisation doit être supérieure au temps de réponse du procédé bouclé, afin que la régulation multidimensionnelle de grammage et d'humidité joue efficacement son rôle lors des modifications de la vitesse. A ce propos, il apparaît de plus qu'il est assez facile d'améliorer le fonctionnement du système en utilisant des actions prédictives.

La vitesse peut en effet être considérée comme une perturbation mesurable intervenant sur le procédé. (Cependant, pour des raisons purement chronologiques, la détermination des éléments d'anticipation correspondants n'a pas fait appel à la théorie développée au § 2.3.3.1. dans le cadre de l'étude des systèmes multidimensionnels). Le retard pur présent entre les débits d'alimentation et le débit de matière en sortie de la caisse de tête étant de l'ordre de 15 secondes, la commande prédictive très élémentaire appliquée au débit de pâte a la forme indiquée par la figure 3.3.2. La variation de la vitesse V étant faible, la variation statique du débit de pâte Q_1 nécessaire pour maintenir le grammage sec constant est donnée par :

$$\Delta Q_1 \simeq Q_1 \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

De plus, il est également indispensable, pour conserver un fonctionnement correct de l'installation du point de vue papetier, de modifier la vitesse du jet de pâte diluée en sortie de la caisse de tête. Sur l'unité pilote, compte tenu de l'instrumentation existante, nous avons pour cela choisi d'agir en conséquence sur l'ouverture de la règle de la caisse de tête. La vitesse V_j de sortie du jet, la section de l'ouverture S et le débit total Q sont liés par la relation : $Q = V_j.S$ Le débit total étant constant, il faut donc réaliser :

$$\Delta S \simeq - S. \frac{\Delta V_j}{V_j} \simeq - S. \frac{\Delta V}{V}$$

.../...

soit encore, si h est la hauteur d'ouverture (mesurée par potentiomètres):

$$\Delta h = - h. \frac{\Delta V}{V}$$

Cette action doit être effectuée en synchronisme avec l'action de vitesse, comme le représente la figure 3.3.2.

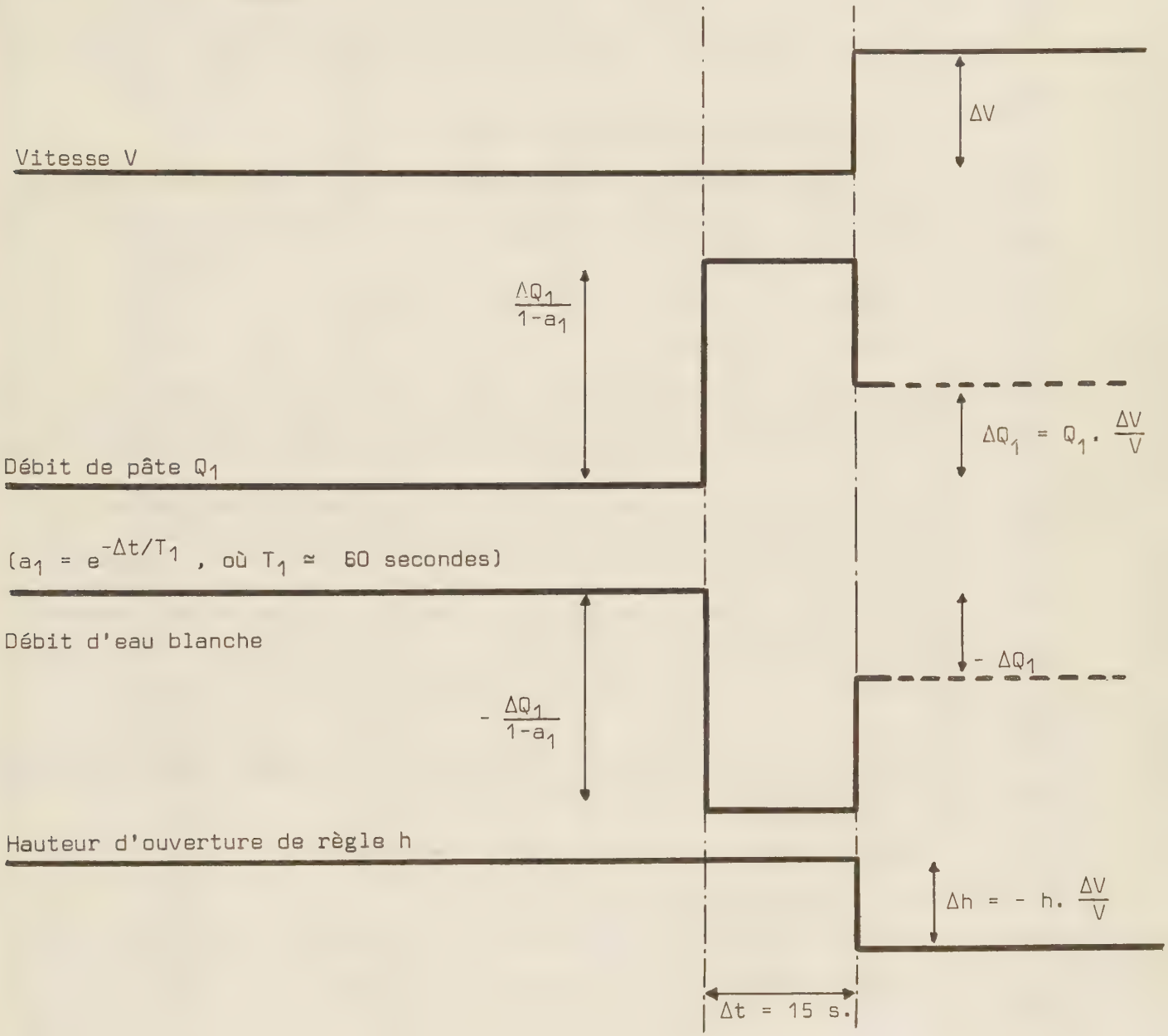


Figure 3.3.2. - SCHEMA DES ACTIONS POUR L'OPTIMISATION

.../...

Il convient de remarquer que pour une application industrielle, la modifi tion de la vitesse du jet ne serait pas effectuée de cette manière, pour des raisons d'ordre technologique.

Par ailleurs, il nous paraît utile de souligner que l'action prédictive ainsi définie pour les débits d'alimentation ne possède pas de justification théorique dans le cas où la régulation multidimensionnelle de grammage et d'humidité est employée. Ayant précédemment donné de bons résultats avec d'autres types de commande, elle a simplement été conservée par suite de son influence satisfaisante lors d'essais expérimentaux. Il serait néanmoins très intéressant de chercher à mettre en oeuvre dans le cadre de cette étude le principe de compensation des perturbations mesurables présenté au § 2.3.3.1. afin d'en évaluer l'efficacité.

3.3.2.2. Exemples de résultats obtenus

Pour l'application sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier de l'algorithme d'optimisation statique de la production, nous avons adopté les paramètres principaux suivants :

- Période d'action de l'optimisation : 5 mn

- Incrément de vitesse : $\pm$ 0,3 m/mn

Les consignes de grammage sec et d'humidité prises en compte par la structure de régulation multidimensionnelle sont respectivement égales à 73 g/m^2 et 6 %. La vitesse générale initiale de la machine est de 60 m/mn.

Pour notre étude, nous avons choisi de fixer les contraintes par le pupitre de dialogue du calculateur numérique couplé au procédé. Il nous est ainsi possible de simuler à notre gré les différentes situations pouvant apparaître. Nous avons considéré trois grandeurs soumises à des contraintes : le débit de pâte, la pression de vapeur en post-sècherie et la vitesse générale de la machine. A chacune de ces variables sont associées trois valeurs définissant la contrainte réelle, la zone libre de régulation et la bande morte d'optimisation (Cf. § 3.3.1.2.).

La figure 3.2.3. présente un premier exemple de mise en oeuvre du programm d'optimisation statique sur l'unité pilote. Les bandes mortes d'optimisation initialement imposées sont les suivantes :

- Débit de pâte : [5,1 m^3/h $\leftrightarrow$ 5,2 m^3/h]

- Pression de vapeur en post-sècherie : [0,6 bar $\leftrightarrow$ 0,7 bar]

- Vitesse générale : [65 m/mn $\leftrightarrow$ 66 m/mn]

.../...

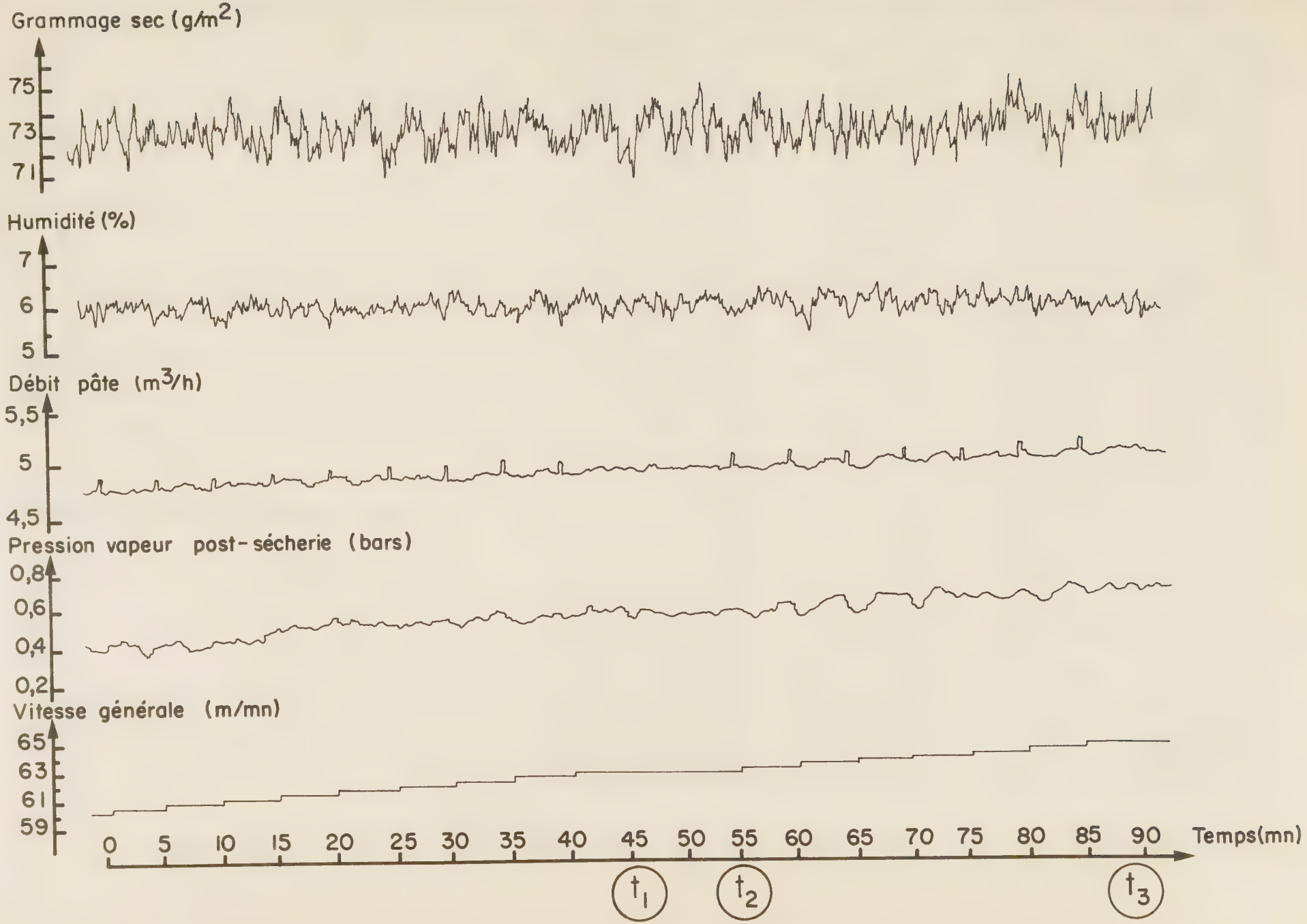


FIGURE 3-2-3 OPTIMISATION STATIQUE - AUGMENTATION DE LA VITESSE

La séquence d'optimisation est déclenchée à l'instant t = o. Toutes les variables soumises à des contraintes étant à ce moment en dessous de leurs bandes mortes respectives, la vitesse subit donc ensuite toutes les 5 minutes un incrément positif égal à 0,3 m/mn. Puis, au temps t_1, la pression de vapeur en post-sècherie devient supérieure à 0,6 bar et entre ainsi dans sa bande morte. La séquence d'optimisation est alors arrêtée, la vitesse demeurant à la valeur constante de 62,7 m/mn.

A l'instant t_2, la contrainte de pression vapeur est augmentée, de façon à amener la bande morte correspondante entre 0,9 et 1 bar. Une nouvelle phase d'optimisation commence donc pour durer jusqu'à l'instant t_3 pour lequel le débit de pâte arrive dans sa bande morte, puisque sa valeur dépasse alors 5,1 m^3/h . La vitesse est à ce moment égale à 64,8 m/mn.

Le second exemple choisi est illustré par la figure 3.2.4. Il concerne le cas pouvant se présenter pour lequel il est nécessaire de réduire la vitesse de manière progressive. La vitesse initiale étant de 65,1 m/mn, nous avons pour cela placé sa bande morte d'optimisation entre 59 et 60 m/mn. La séquence d'optimisation conduit donc à effectuer toutes les 5 minutes un incrément négatif de - 0,3 m/mn, jusqu'à l'instant t_4 correspondant à une vitesse égale à 60 m/mn.

Les exemples présentés montrent le bon déroulement de l'algorithme d'optimisation pour différentes situations possibles. De plus, ce mode de fonctionnement permet d'apprécier aussi le comportement très satisfaisant de la structure de régulation multidimensionnelle du grammage sec et l'humidité. En effet, d'une part, ces deux grandeurs sont maintenues dans leurs limites de variations habituelles pendant les phases transitoires au cours desquelles la vitesse évolue, et d'autre part, la structure de commande conserve bien son efficacité lorsque le point de fonctionnement est modifié. Cette dernière remarque confirme donc encore les résultats présentés à ce propos au § 3.1.3.1.

.../...

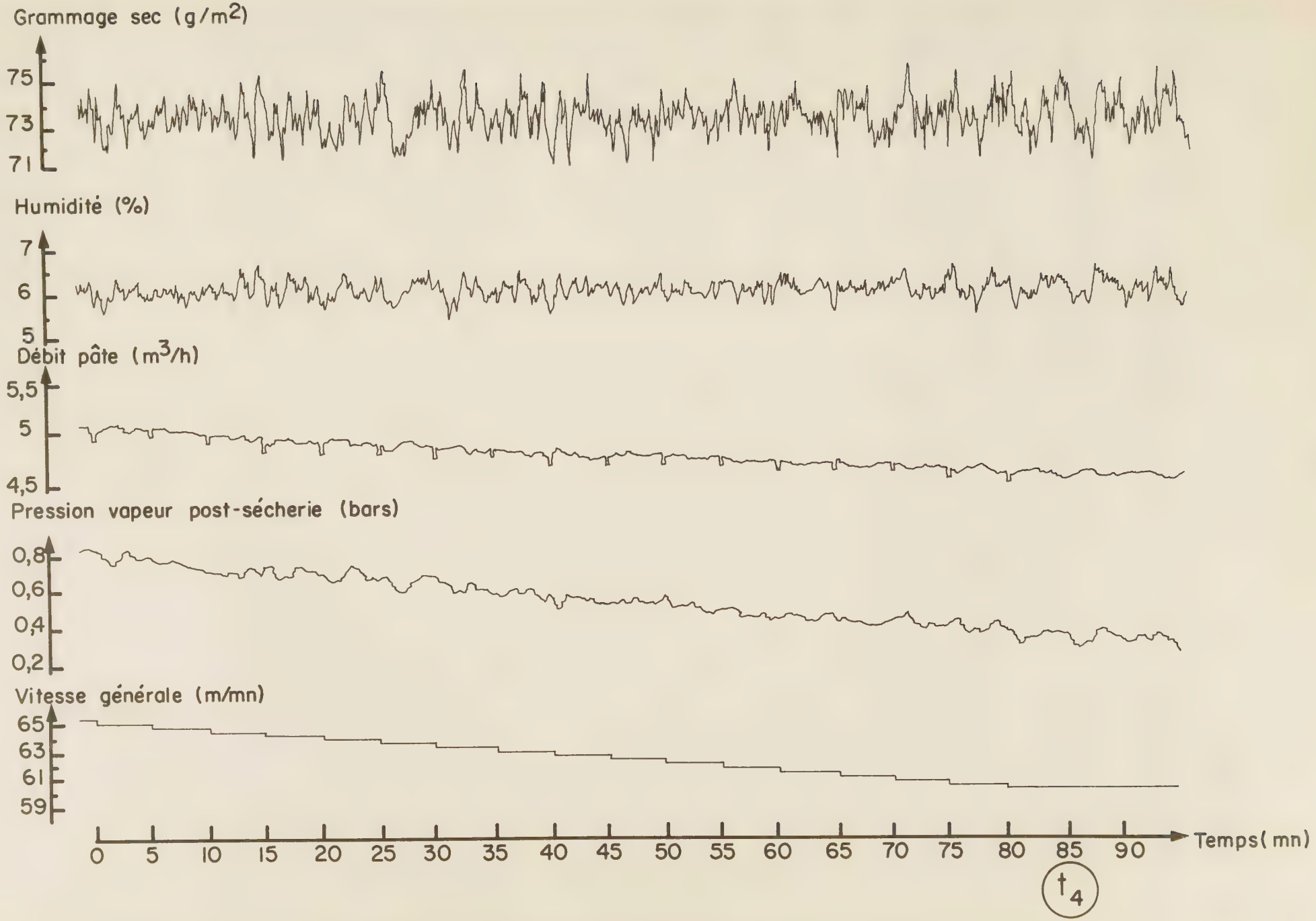


FIGURE 3-2-4 OPTIMISATION STATIQUE - DIMINUTION DE LA VITESSE

3.4. CONCLUSIONS

La mise en oeuvre sur l'unité pilote du Centre Technique du Papier de la structure de commande multidimensionnelle précédemment définie a permis de mettre en évidence certaines de ses propriétés très intéressantes.

Le fait d'avoir réalisé son application sur deux systèmes assez différents (grammage-humidité et couleur) nous semble par ailleurs un gage supplémentaire de la bonne uniformité des performances ainsi obtenues.

Les diverses études expérimentales confirment les avantages que peuvent apporter l'emploi d'un modèle de référence et la prise en compte des perturbations mesurable. De plus, par ses dimensions et ses caractéristiques, l'unité pilote constitue un véritable procédé de type industriel, à échelle réduite certes, mais présentant néanmoins de nombreuses non-linéarités et de multiples imbrications de phénomènes. Les résultats enregistrés paraissent bien être par conséquent très révélateurs de la robustesse de la structure de commande adoptée.

oOo

CONCLUSION

Les études que nous avons menées sur la machine à papier expérimentale du Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses ont été riches d'enseignements pour l'appréciation des méthodes développées. Pour l'identification dynamique des différents sous-ensembles considérés, l'utilisation des séquences binaires pseudo-aléatoires permet d'obtenir par intercorrélation la réponse impulsionnelle du système, au prix d'une mise en oeuvre relativement aisée et à partir de connaissances à priori très réduites. L'ajustement d'un modèle paramètrique par les deux algorithmes de programmation non-linéaire choisis se révèle alors d'une très bonne efficacité, et peut par ailleurs être utilisé pour d'autres formes de réponses expérimentales.

La structure de commande multidimensionnelle que nous proposons nous paraît présenter plusieurs caractéristiques intéressantes. En particulier, l'emploi d'un modèle de référence et la prise en compte des perturbations mesurables conduisent à une bonne homogénéité des performances tant pour le fonctionnement en asservissement que pour le fonctionnement en régulation. Les différents essais réalisés semblent bien prouver la robustesse de cette solution, notamment en ce qui concerne l'insensibilité satisfaisante aux variations des paramètres. De plus, il convient de rappeler que la théorie de l'optimalisation quadratique est un outil très puissant pour la commande des systèmes multidimensionnels, pour lesquels il est ainsi possible de définir globalement les conditions de stabilité. Il faut noter aussi à ce propos que le critère quadratique qui tend à être minimisé est, dans notre cas, un simple moyen de calcul choisi en fonction des performances souhaitées. Le caractère d'optimalité, qui est spécifiquement relatif à ce critère, ne saurait donc être pris en considération de manière absolue.

Le but des études effectuées au Centre Technique dans le domaine de l'automatisation n'est évidemment pas de réaliser l'identification ou la commande de l'unité pilote. L'objectif recherché est toujours de parvenir à une application aussi large que possible des techniques modernes de l'automatique sur les installations de production. Cependant, la machine à papier expérimentale constitue un moyen de tester de manière très approfondie les méthodes susceptibles d'être ensuite utilisées dans l'industrie. D'une part, il est en effet ainsi possible de soumettre ces méthodes à des essais nombreux et surtout très variés, grâce à l'absence de contraintes réelles de production. D'autre part, les rapports d'homothétie corrects existant entre les machines industrielles et l'unité pilote rendent les résultats obtenus sur cette dernière très significatifs. Il nous semble donc que les connaissances acquises au cours de nos différents travaux permettent d'envisager de manière satisfaisante l'étape suivante, c'est à dire les applications possibles sur des unités de production. C'est d'ailleurs déjà le cas en ce qui concerne l'identification dynamique des systèmes.

.../...

Il reste néanmoins de nombreuses directions dans lesquelles les études peuvent être développées pour améliorer encore les performances et les facilités d'utilisation. Nous pensons en particulier à une simplification dans la détermination des éléments de la commande multidimensionnelle, ou encore aux problèmes posés par une panne éventuelle d'un capteur ou d'un actionneur intervenant dans une telle structure. Ce dernier point constitue actuellement l'un de nos centres d'intérêt car il se révèle très important pour une exploitation continue. Les méthodes que nous présentons, tant pour l'identification dynamique que pour la commande des systèmes multidimensionnels, ne peuvent prétendre résoudre tous les problèmes correspondants. D'autres possibilités font d'ailleurs également l'objet d'études et d'applications dans le cadre des programmes du Centre Technique. Les moyens proposés nous semblent simplement constituer des solutions intéressantes pour des cas fréquemment rencontrés, que ce soit dans la fabrication du papier ou dans de nombreux autres domaines.

Nous souhaitons pour notre part que nos travaux contribuent au développement de l'automatisation par calculateurs numériques dans l'industrie papetière française. Par sa souplesse et sa puissance, grâce à l'emploi de méthodes toujours plus performantes, cette solution est très certainement appelée à connaître un essor important. Nous la considérons actuellement comme indispensable pour améliorer réellement les conditions d'exploitation, tant du point de vue technique et commercial que sur le plan humain.

oOo

A N N E X E

ETUDE DE L'EQUATION MATRICIELLE [X] - [A][X][B] = [C]

Nous nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité de la matrice [X] de dimensions (nxm) vérifiant l'équation :

$$[X] - [A][X][B] = [C] \qquad (A.1)$$

[A], [B] et [C] sont des matrices connues de dimensions respectives (nxn), (mxm) et (nxm).

F.R. GANTMACHER [24] a déjà présenté une analyse très complète de l'équation matricielle :

$$[A_1][X_1] - [X_1][B_1] = [C_1] \qquad (A.2)$$

Cette forme est voisine de la relation (A.1) considérée mais, dans le cas général où les matrices [A] et [B] ne sont pas forcément inversibles, il est cependant nécessaire de reprendre toute l'étude.

Soient $[A^*]$ et $[B^*]$ les formes de JORDAN des matrices [A] et [B], telles que :

$$[A] = [U][A^*][U]^{-1}$$

et

$$[B] = [V][A^*][V]^{-1}$$

L'équation (A.1) peut donc s'écrire :

$$[X] - [U][A^*][U]^{-1}\ [X][V][B^*][V]^{-1} = [C]$$

.../...

soit encore, en pré-multipliant par $[U]^{-1}$ et en post-multipliant par [V] les différents termes :

$$[U]^{-1}\,[X][V] - [A^*][U]^{-1}\,[X][V][B^*] = [U]^{-1}\,[C][V] \qquad (A.3)$$

Posons alors :

$$[X^*] = [U]^{-1}\,[X][V]$$

et

$$[C^*] = [U]^{-1}\,[C][V]$$

La relation (A.3) devient :

$$[X^*] - [A^*][X^*][B^*] = [C^*] \qquad (A.4.)$$

où $[A^*]$ et $[B^*]$ sont des formes normales de JORDAN.

Les correspondances entre les matrices [A], [B], [C] et [X] d'une part et les matrices $[A^*]$,$[B^*]$,$[C^*]$ et $[X^*]$ d'autre part sont bien biunivoques puisque, d'après leurs définitions, les matrices [U] et [V] sont régulières. C'est donc sur une équation de la forme (A.4) que nous poursuivrons désormais notre étude en reprenant toutefois, pour ne pas alourdir les expressions, la notation initiale :

$$[X] - [A][X][B] = [C] \qquad (A.5)$$

où [A] et [B] sont maintenant des formes normales de JORDAN.

.../...

I - ETUDE DE L'EQUATION HOMOGENE ASSOCIEE

Considérons tout d'abord l'équation matricielle homogène associée :

$$[X] - [A][X][B] = [0] \qquad (A.6)$$

[A] et [B] étant des formes normales de JORDAN, ces matrices sont constituées de la manière suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] & & 0 \\ & [A_2] & \\ & & \ddots \\ 0 & & [A_p] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} [B_1] & & 0 \\ & [B_2] & \\ & & \ddots \\ 0 & & [B_q] \end{bmatrix}$$

Le bloc $[A_i]$ est de dimensions $(n_i x n_i)$ si n_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante λ_i de la matrice [A].

De même, le bloc $[B_j]$ est de dimensions $(m_j x m_j)$ si m_j est l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante μ_j de la matrice [B].

Décomposons alors la matrice [X] en p.q blocs, comme l'indique la représentation suivante :

$$[X] = \begin{bmatrix} [X_{11}][X_{12}] \ldots\ldots [X_{1j}] \ldots\ldots [X_{1q}] \\ [X_{21}][X_{22}] \ldots\ldots [X_{2j}] \ldots\ldots [X_{2q}] \\ \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [X_{i1}][X_{i2}] \ldots\ldots [X_{ij}] \ldots\ldots [X_{iq}] \\ \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [X_{p1}][X_{p2}] \ldots\ldots [X_{pj}] \ldots\ldots [X_{pq}] \end{bmatrix}$$

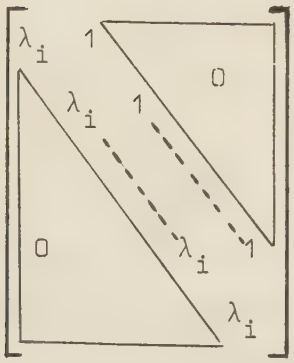
où $[X_{11}]$ est un bloc de dimensions $(n_1 x m_1)$, ... $[X_{ij}]$ un bloc de dimensions $(n_i x m_j)$,..., $[X_{pq}]$ un bloc de dimensions $(n_p x m_q)$.

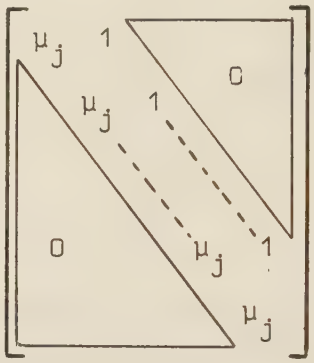
.../...

Il est facile de voir que l'équation homogène globale (A.6) se décompose ainsi en p.q équations homogènes partielles (de type matriciel, mais pouvant être évidemment scalaires) :

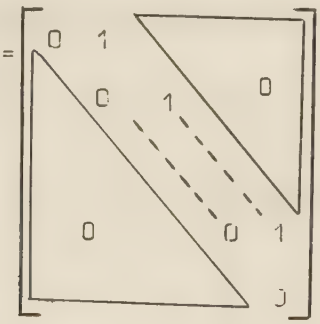
$$[X_{ij}] - [A_i][X_{ij}][B_j] = [0] \qquad (A.7)$$

avec :

$[A_i]$ = 

et $[B_j]$ = 

Appelons $[E_k]$ la matrice unitaire de rang k, et $[F_k]$ la matrice carrée de dimensions (kxk) telle que :

$[F_k]$ = 

Nous avons donc :

$$\begin{cases} [A_i] = \lambda_i \cdot [E_i] + [F_i] \\ [B_j] = \mu_j \cdot [E_j] + [F_j] \end{cases} \qquad (A.8)$$

et, par suite :

$$[A_i][X_{ij}][B_j] = (\lambda_i [E_i] + [F_i]) [X_{ij}] (\mu_j [E_j] + [F_j])$$

.../...

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$[A_i][X_{ij}][B_j] = \lambda_i \mu_j [X_{ij}] + \lambda_i [X_{ij}][F_j] + \mu_j [F_i][X_{ij}] + [F_i][X_{ij}][F_j]$$

(A.9)

L'équation matricielle homogène relative au bloc $[X_{ij}]$ prend donc finalement la forme :

$$\boxed{(1 - \lambda_i \mu_j)\,[X_{ij}] = \lambda_i [X_{ij}][F_j] + \mu_j [F_i][X_{ij}] + [F_i][X_{ij}][F_j]}$$

(A.10)

Toutes les relations analogues peuvent évidemment être analysées de la même façon, et nous nous intéresserons donc à l'une seule d'entre elles. Pour alléger encore l'écriture, nous noterons pour les développements suivants :

$$\begin{cases} \lambda_i \to \lambda \ ; \quad \mu_j \to \mu \ ; \quad [X_{ij}] \to [Z] \quad ; \quad [F_j] \to [G] \quad \text{et} \quad [F_i] \to [H] \\ n_i \to n \ ; \quad m_j \to m \end{cases}$$

(Il faut remarquer que [G] et [H] sont donc des matrices de même type, mais qu'il est nécessaire de noter différemment car elles ne sont généralement pas de mêmes dimensions.)

La relation (A.10) prend alors la forme :

$$\boxed{(1 - \lambda\mu)\,[Z] = \lambda [Z][G] + \mu [H][Z] + [H][Z][G]} \qquad \text{(A.11)}$$

I.1. Premier cas : $\lambda\mu \neq 1$

Nous allons chercher à montrer que pour k supérieur à une certaine valeur, la quantité $(1 - \lambda\mu)^k.[Z]$ est identiquement nulle.

Pour cela, nous multiplions les deux membres de l'équation (A.11) par $(1-\lambda\mu)$, en remplaçant ensuite dans chaque terme la quantité $(1-\lambda\mu).[Z]$ par l'expression fournie par (A.11). Ce processus est alors itéré un certain nombre de fois.

.../...

Calculons les premières expressions de cette suite :

$$(1-\lambda\mu)^2\,[Z] = \lambda(1-\lambda\mu)\,[Z][G] + \mu[H](1-\lambda\mu)\,[Z] + [H](1-\lambda\mu)\,[Z][G]$$

Soit, en remplaçant $(1-\lambda\mu)\,[Z]$ par sa valeur :

$$(1-\lambda\mu)^2\,[Z] = \lambda^2[Z][G]^2 + \mu^2[H]^2[Z] + 2\,(\lambda[H][Z][G]^2 + \mu[H]^2[Z][G] + \lambda\mu[H][Z][G]\,) + [H]^2[Z][G]^2$$

De même, en remplaçant $(1-\lambda\mu)\,[Z]$ par sa valeur et en regroupant certains termes, l'expression de $(1-\lambda\mu)^3\,[Z]$ est donnée par :

$$(1-\lambda\mu)^3[Z] = \lambda^3[Z][G]^3 + 3\lambda^2\mu[H][Z][G]^2 + 3\lambda\mu^2\,[H]^2[Z][G] + \mu^3[H]^3[Z] + 3\,(\lambda^2[H][Z][G]^3 + 2\lambda\mu[H]^2[Z][G]^2 + \mu^2[H]^3[Z][G]) + 3(\lambda[H]^2[Z][G]^3 + \mu[H]^3[Z][G]^2) + [H]^3[Z][G]^3$$

En poursuivant encore les calculs, il est possible de faire apparaître la forme générale :

$$\boxed{(1-\lambda\mu)^k\,[Z] = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \sum_{j=o}^{k-i} C_{k-i}^j\ \lambda^j\ \mu^{k-i-j}\ [H]^{k-j}\ [Z][G]^{j+i}} \qquad (A.12)$$

où C_α^β est la formule classique d'analyse combinatoire donnant le nombre de combinaisons possibles de β éléments pris parmi α.

Nous allons donc montrer que cette formule est bien valable $\forall$ k positif entier. Pour cela, supposons que la relation (A.12) soit vérifiée jusqu'à l'ordre k, et calculons $(1-\lambda\mu)^{k+1}\,[Z]$. Il vient :

$$(1-\lambda\mu)^{k+1}\,[Z] = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \sum_{j=o}^{k-i} C_{k-i}^j\ \lambda^{j+1}\ \mu^{k-i-j}\ [H]^{k-j}\ [Z][G]^{j+i+1}$$

$$+ \sum_{i=o}^{k} C_k^i \sum_{j=o}^{k-i} C_{k-i}^j\ \lambda^j\ \mu^{k-i-j+1}\ [H]^{k-j+1}\ [Z][G]^{j+i}$$

$$+ \sum_{i=o}^{k} C_k^i \sum_{j=o}^{k-i} C_{k-i}^j\ \lambda^j\ \mu^{k-i-j}\ [H]^{k-j+1}\ [Z][G]^{j+i+1}$$

.../...

soit :

$$(1-\lambda\mu)^{k+1}\,[Z] = [T_1] + [T_2] + [T_3]$$

Considérons le premier terme, $[T_1]$, et effectuons le changement d'indice $j := j+1$. Son expression devient :

$$[T_1] = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \sum_{j=1}^{k+1-i} C_{k-i}^{j-1}\ \lambda^j\ \mu^{k+1-i-j}\ [H]^{k+1-j}\ [Z][G]^{j+i}$$

d'où :

$$[T_1] + [T_2] = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{k+1-i} C_{k-i}^{j-1}\ \lambda^j\ \mu^{k+1-i-j}\ [H]^{k+1-j}\ [Z][G]^{j+i} + \sum_{j=o}^{k-i} C_{k-i}^{j}\ \lambda^j\ \mu^{k+1-i-j}\ [H]^{k+1-j}\ [Z][G]^{j+i} \right.$$

En remarquant que :

a) $C_{k-i}^{j-1} + C_{k-i}^{j} = C_{k+1-i}^{j}$

b) $(C_{k-i}^{j-1})_{j\,=\,k+1-i} = C_{k-i}^{k-i} = 1 = (C_{k+1-i}^{j})_{j\,=\,k+1-i}$

c) $(C_{k-i}^{j})_{j=o} = C_{k-i}^{o} = 1 = (C_{k+1-i}^{j})_{j=o}$

il est possible d'écrire $[T_1] + [T_2]$ sous la forme :

$$[T_1] + [T_2] = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \sum_{j=o}^{(k+1)-i} C_{(k+1)-i}^{j}\ \lambda^j\ \mu^{(k+1)-i-j}\ [H]^{(k+1)-j}\ [Z][G]^{j+i}$$

Par ailleurs, en effectuant le changement d'indice $i := i+1$, le terme $[T_3]$ devient :

$$[T_3] = \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} \sum_{j=o}^{k+1-i} C_{k+1-i}^{j}\ \lambda^j\ \mu^{k+1-i-j}\ [H]^{k+1-j}\ [Z][G]^{j+i}$$

.../...

d'où la forme globale :

$$[T_1] + [T_2] + [T_3] = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \; [W] + \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} \; [W]$$

En remarquant cette fois que :

a) $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$

b) $C_k^o = 1 = (C_{k+1}^i)_{i=o}$

c) $C_k^k = 1 = (C_{k+1}^i)_{i=k+1}$

l'expression recherchée s'écrit finalement :

$$(1-\lambda\mu)^{k+1} \; [Z] = \sum_{i=o}^{(k+1)} C_{(k+1)}^i \sum_{j=o}^{(k+1)-i} C_{(k+1)-i}^j \; \lambda^j \; \mu^{(k+1)-i-j} \; [H]^{(k+1)-j}$$

$$[Z][G]^{j+i}$$

Nous retrouvons en fait la même loi que dans la relation (A.12), écrite pour (k+1). La forme générale envisagée est donc bien vérifiée :

$$(1-\lambda\mu)^k \; [Z] = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \sum_{j=o}^{k-i} C_{k-i}^j \; \lambda^j \; \mu^{k-i-j} \; [H]^{k-j} \; [Z][G]^{j+i} \qquad (A.12)$$

Si [H] est d'ordre n et [G] d'ordre m, il est facile de montrer d'après la structure de ces deux matrices que :

$[H]^{\alpha} \equiv [o]$ pour α entier $\geq n$

$[G]^{\beta} \equiv [o]$ pour β entier $\geq m$.

.../...

Supposons alors $k \geq n + m - 1$

Dans chaque terme figurant dans la somme double de l'expression précédente (A.12), la somme de la puissance r de la matrice [H] et de la puissance s de la matrice [G]vérifie :

$$r + s = k + i$$

Si $k \geq n + m - 1$, nous avons donc :

$$r = s \geq n + m + i - 1$$

Pour une valeur donnée de l'indice courant de sommation i, si nous considérons les termes correspondants dans l'ordre de la puissance r décroissante, la première valeur de $[H]^r$ non identiquement nulle correspond à $r = n - 1$. Dans ce même terme, la puissance s de la matrice [G] est alors :

$s = k + i - r$,soit :

$$s = k + i - n + 1$$

Donc, si $k \geq n + m - 1$, nous avons : $s \geq m + i$, et a fortiori :

$s \geq m$ puisque $i \geq o$

Par suite, $[G]^s$ est ainsi forcément nulle lorsque $[H]^r$ ne l'est pas, et réciproquement.

Finalement, pour $k \geq n + m - 1$, tous les termes de la double somme sont donc identiquement nuls, c'est à dire que :

$$(1-\lambda\mu)^k [Z] = [O]$$

ou encore, puisque nous sommes dans le cas où $\lambda\mu \neq 1$:

$$[Z] = [O]$$

Il est ainsi possible, en revenant aux notations initiales, d'énoncer un premier résultat partiel :

Si $\lambda_i \mu_j \neq 1$, l'équation homogène partielle faisant intervenir le bloc $[X_{ij}]$ correspondant n'admet que la solution triviale, c'est à dire

$$[X_{ij}] = [O]$$

.../...

I.2. Second cas : $\lambda\mu = 1$

Nous avons donc alors, en reprenant les notations simplifiées :

$(1-\lambda\mu)\,[Z] = [0]$

L'équation homogène partielle considérée devient ainsi :

$$\lambda\,[Z][G] + \mu[H][Z] + [H][Z][G] = [0] \qquad (A.13)$$

Rappelons, en utilisant toujours les notations abrégées, les formes suivantes :

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \} m \end{matrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{m}$

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \} n \end{matrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}$

$$[Z] = \underbrace{\begin{bmatrix} \{z_{pq}\} \end{bmatrix}}_{m} \} n \qquad p \in [1, n] \quad ; \quad q \in [1, m]$$

Notons maintenant $\{\alpha_{pq}\}$ les éléments de $[Z][G]$, $\{\beta_{pq}\}$ les éléments de $[H][Z]$ et $\{\gamma_{pq}\}$ les éléments de $[H][Z][G]$. Il est facile de voir que :

a) $\begin{cases} \alpha_{p1} = 0 \quad \forall p = 1,2\ldots., n \quad \text{(1ère colonne nulle)} \\ \alpha_{pq} = z_{p,q-1} \quad \forall p = 1,2,\ldots., n \text{ et pour } q = 2,3,\ldots, m \end{cases}$

.../...

b) $\begin{cases} \beta_{pq} = z_{p+1,q} \quad \text{pour } p = 1,2,\ldots, n-1 \text{ et } \forall q = 1,2,\ldots, m \\ \beta_{nq} = 0 \quad \forall q = 1,2,\ldots, m \quad \text{(dernière ligne nulle)} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \gamma_{pq} = z_{p+1,q-1} \text{ pour } p = 1,2,\ldots., n-1 \text{ et pour } q = 2,3, \ldots, m \\ \gamma_{p1} = 0 \quad \forall p = 1,2,\ldots, n \quad \text{(1ère colonne nulle)} \\ \gamma_{nq} = 0 \quad \forall q = 1,2,\ldots, m \quad \text{(dernière ligne nulle)} \end{cases}$

L'équation matricielle partielle (A.13) se décompose donc en équations scalaires de la manière suivante :

a) pour $p = n$ et $q = 1$: $0=0$

b) pour $p = n$ et $q = 2,3,\ldots, m$: $z_{n,q-1} = 0$

c) pour $p = 1,2,\ldots,n-1$ et $q = 1$: $z_{p+1,1} = 0$

d) pour $p = 1,2,\ldots,n-1$ et $q = 2,3,\ldots, m$: $\lambda z_{p,q-1} + \mu z_{p+1,q} + z_{p+1,q-1} = 0$

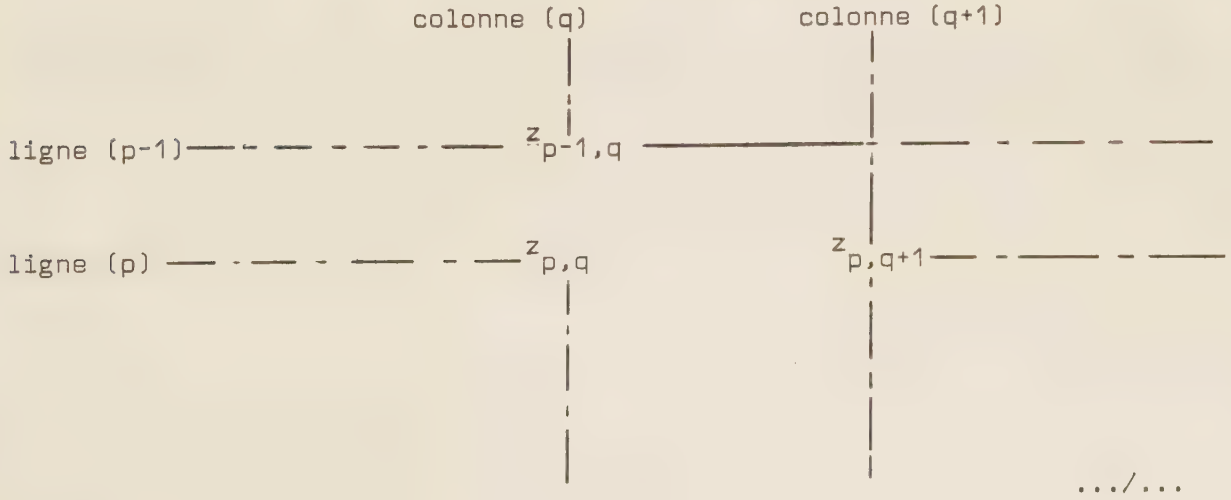
Ce qui peut encore s'exprimer par :

a) $z_{n,q} = 0$ pour $q = 1,2,\ldots, m-1$

b) $z_{p,1} = 0$ pour $p = 2,3,\ldots, n$

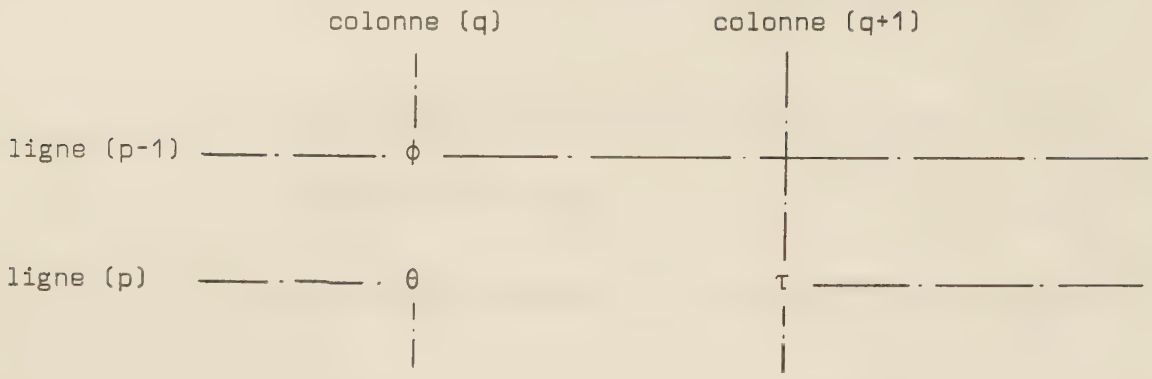
c) $\lambda z_{p-1,q} + \mu z_{p,q+1} + z_{p,q} = 0$ pour $p = 2,3,.., n$ et $q = 1,2,.., m-1$ (A.14)

Considérons alors le schéma suivant représentant une partie de la matrice [Z] :



.../...

et notons-le symboliquement :



D'après l'équation (A.14), les trois éléments ϕ, θ et τ sont liés par :

$$\lambda\phi + \mu\tau + \theta = 0 \qquad \text{(avec } \lambda\mu = 1\text{)} \qquad \text{(A.15)}$$

Si m >n, en partant des deux "zéros" les plus à droite dans la dernière ligne et en utilisant la relation (A.15), il est facile de voir que la matrice [Z] est alors de la forme suivante (car ϕ est nul si θ et τ sont nuls) :

$$[Z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{1,m-n+1} & \cdots & z_{1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & z_{n,m} \end{bmatrix}$$

De même, si m ≤n, en partant des deux "zéros" les plus en haut dans la première colonne et en utilisant la relation (A.15), il est encore facile de voir que la matrice [Z] est dans ce cas de la forme ci-après (car τ est nul si ϕ et θ sont nuls) :

.../...

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,m} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & z_{m,m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc, dans tous les cas, la matrice rectangulaire [Z] est de forme "triangulaire supérieure". Si t = min(m,n), il ne reste en fait que t(t+1)/2 éléments à déterminer.

Par suite, avec la relation (A.15), il est très simple de montrer que t de ces coefficients encore inconnus peuvent être choisis arbitrairement (par exemple les coefficients de la première ligne, ou de la dernière colonne, etc...)

En revenant aux notations initiales, il est possible d'énoncer le résultat partiel suivant :

Si $\lambda_i \mu_j = 1$, *l'équation homogène partielle faisant intervenir le bloc* $[X_{ij}]$ *correspondant admet des solutions* $[X_{ij}]$ *non identiquement nulles.*

Remarque :

Tous les calculs précédents ont été conduits avec, pour les matrices [A] et [B], des formes normales de JORDAN. Mais nous avons déjà indiqué que les correspondances entre les matrices [A], [B], [C] et [X] d'une part et [A*], [B*], [C*] et [X*] d'autre part sont biunivoques, les matrices de passage étant régulières. Les conditions de nullité ou de non-nullité sont donc les mêmes pour les deux matrices [X] et [X^*].

.../...

Il est ainsi possible d'énoncer de façon tout à fait générale le théorème suivant :

THEOREME 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation matricielle homogène :

$$[X] - [A][X][B] = [O]$$

n'admette pas d'autres solutions que la solution triviale $[X] = [O]$ *est qu'aucune des valeurs propres de la matrice* $[A]$ *ne soit égale à l'inverse d'une valeur propre de la matrice* $[B]$.

II - ETUDE DE L'EQUATION COMPLETE

Considérons de nouveau l'équation matricielle complète proposée, où les matrices [A], [B], [C] et [X] sont respectivement de dimensions (nxn), (mxm), (nxm) et (nxm).

$$[X] - [A][X][B] = [C]$$

L'équation matricielle homogène associée précédemment étudiée est équivalente à un système scalaire de (nxm) équations homogènes à (nxm) inconnues. Ce système est donc caractérisé par un déterminant Δ d'ordre (nxm).

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système homogène de k équations à k inconnues n'admette pas d'autres solutions que la solution triviale est que son déterminant soit différent de zéro.

D'après le *THEOREME 1*, une condition nécessaire et suffisante pour que Δ soit différent de zéro est donc qu'aucune des valeurs propres de la matrice [A] ne soit égale à l'inverse d'une valeur propre de la matrice [B].

Revenons alors à l'équation matricielle complète :

$$[X] - [A][X][B] = [C]$$

Nous avons ainsi un système de (nxm) équations avec seconds membres, à (nxm) inconnues, et dont le déterminant est encore Δ. La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit de type "CRAMER" et que Δ ne soit pas nul. Dans ce cas, la solution existe et elle est unique.

.../...

Nous pouvons donc finalement énoncer le théorème général suivant :

THEOREME 2

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation matricielle :

$[X] - [A][X][B] = [C]$

admette une solution $[X]$ *unique est qu'aucune des valeurs propres de la matrice* $[A]$ *ne soit égale à l'inverse d'une valeur propre de la matrice* $[B]$.

Si cette condition n'est pas satisfaite, l'équation matricielle considérée possède un nombre de solutions soit nul, soit infini, selon les caractéristiques des matrices connues [A], [B] et [C].

oOo

BIBLIOGRAPHIE

[1] - A. MENENDEZ-MARTINEZ

"Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélation au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires".

Thèse de Docteur Ingénieur - Grenoble 1970.

[2] - B. LEBEAU - J.P. SANDRAZ

"Contribution à l'identification des systèmes physiques"

C.R. CTP n° 516, au titre de la Convention 67.00.911 de la DGRST - Grenoble 1972.

[3] - R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET

"Commande optimale des processus".

Tome 1 : "Concepts fondamentaux de l'automatisme" - Dunod 1967
Tome 2 : "Programmation non-linéaire et ses applications" - Dunod 1968
Tome 3 : "Programmation dynamique et ses applications" - Dunod 1968
Tome 4 : "Méthodes variationnelles et leurs applications" - Dunod 1968

[4] - D.J. WILDE

"Méthodes de recherche d'un optimum"

Dunod - 1966

[5] - J.B. BERN

"Identification en temps réel d'une colonne à distiller pilote"

Thèse de Docteur-Ingénieur - Grenoble 1972

[6] - S. GENTIL, J.P. SANDRAZ, C. FOULARD

"Different methods for dynamic identification of an experimental paper machine"

Troisième Symposium IFAC sur l'Identification et l'estimation des paramètres des systèmes - LA HAYE - 1973.

.../...

[7] - S. GENTIL

"Etude comparative de diverses méthodes statistiques d'identification des systèmes dynamiques".

Thèse de 3e cycle - Grenoble - 1972

[8] - K.J. ÅSTRÖM, T. BOHLIN, S. WENSMARK

"Automatic construction of linear stochastic dynamic models for industrial processes with random disturbances using operating records"

Report, IBM Nordic Laboratory - STOCKHOLM - 1965

[9] - D.W. CLARKE

"Generalized least squares estimation of the parameters of a dynamic model"

Symposium IFAC - PRAGUE - 1967

[10] - G. BANON

"Etude d'algorithmes d'estimation des paramètres pour l'identification adaptative en temps réel des processus linéaires perturbés par un bruit corrélé"

Thèse de Docteur-Ingénieur - TOULOUSE - 1971

[11] - B. LEBEAU

"Commande par calculateur numérique d'une unité pilote de fabrication de papier"

Thèse de Docteur-Ingénieur - GRENOBLE - 1971

[12] - A. RAMAZ *et Al.*

"Etude de l'automatisation du processus de fabrication du papier sur une unité pilote".

C.R. CTP n° 526. Compte rendu de fin de contrat de l'Action Concertée DGRST n° 67.00.911 - GRENOBLE - 1972

.../...

[13] - L.S. PONTRYAGIN, BOLTYANSKI, GAMKRELIDZE, MISHENKO

"The mathematical theory of optimal processes"

J. WILEY - NEW YORK - 1962

[14] - R.E. KALMAN

"On the general theory of control systems"

1er Congrès IFAC - BUTTERWORTH - 1963

[15] - M. ATHANS, P.L. FALB

"Optimal Control"

Mc GRAW-HILL BOOK - 1966

[16] - M. FOND, C. FOULARD

"Commande de systèmes multivariables linéaires par action proportionnelle et intégrale".

Compte rendu à l'Académie des Sciences - Janvier 1971

[17] - M. FOND

"Contribution à la Synthèse de la commande dynamique des systèmes multidimensionnels"

Thèse de Docteur-Ingénieur - GRENOBLE - 1971

[18] - M. NOUGARET

"Sur une méthode de synthèse, par retour d'état, de la commande des procédés physiques"

Thèse de Doctorat Es-Sciences Physiques - GRENOBLE - 1972

[19] - Z. BINDER

"Commande optimale dynamique d'un procédé industriel multivariable".

Thèse de Docteur-Ingénieur - GRENOBLE - 1971

.../...

[20] - P.M. ZOYDO-CRESPO

"Sur la commande multidimensionnelle avec modèle de référence"

Thèse de Docteur-Ingénieur - GRENOBLE 1973

[21] - R. PERRET

"Systèmes linéaires"

Cours enseigné à l'Institut Polytechnique de Grenoble - 1969

[22] - A. RAMAZ

"Statistiques Mathématiques"

Cours enseigné à l'Ecole Française de Papeterie.

[23] - K.J. ÅSTRÖM, P. EYKHOFF

"System identification - A survey"

Symposium IFAC-PRAGUE - 1970

[24] - F.R. GANTMACHER

"Théorie des matrices" - Tomes 1 et 2

Dunod - 1966

[25] - J. RICHALET, A. RAULT, R. POULIQUEN

"Identification des processus par la méthode du modèle"

GORDON & BREACH - 1972

[26] - C. FOULARD

"Sur la commande quasi-optimale, obtenue par apprentissage, d'une classe de procédés physiques".

Thèse de Doctorat Es-Sciences physiques - GRENOBLE - 1969

oOo

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 22 Juin 1973

Le Président de la thèse

R. Pauthenet

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale